xyz 空間において，点 $(3\,,\,-1\,,\,1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $P_2(5\,,\,0\,,\,-1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ。
(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。
(3) (2) の円に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。
(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

< ’24 東北大 >

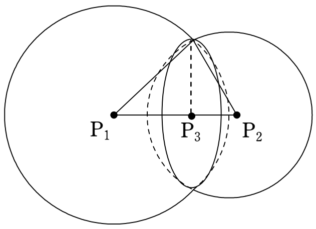
【戦略】

(1) **2 点間の距離公式から，**

$$P_1P_2=\sqrt{(5-3)^2+\{0-(-1)\}^2+(-1-1)^2}=3$$

と一発で仕留めます。

(2) **$|$半径の差$|<$(中心間距離)$<$(半径の和) であることを示すことになります。(平面の 2 円が交わりをもつときの翻訳と同様)**



C の半径については，r とおくと，三平方の定理から

$$P_1P_3=\sqrt{5-r^2}$$
$$P_2P_3=\sqrt{2-r^2}$$

となるため，$P_1P_2=3$ であることを利用して $\sqrt{5-r^2}+\sqrt{2-r^2}=3$ を捌くことになります。

これにより，$r=1$ を得るため，

$$P_1P_3=\sqrt{5-1}=2\,,\ P_2P_3=\sqrt{2-1}=1$$

となり，P_3 は線分 P_1P_2 を $2:1$ に内分する点であることが分かります。

あとは内分点の公式で捌けばよいでしょう。

(3) **xy 平面に平行なベクトルですから，求めるベクトルを $\vec{e}$ とすると，$\vec{e}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ と表せます。**

まず，大きさが 1 という条件から $a^2+b^2=1$ という式が得られます。

また，$\vec{e}$ は平面 H とも平行であり，H と $\overrightarrow{P_1P_2}$ が直交することから $\vec{e}$ は $\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ と直交することになります。

したがって，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$，すなわち $2a+b=0$ を得るため，

$$(a\,,\,b)=\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\,,\,\mp\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\ \text{(複号同順)}$$

を得て，解決です。

(4) **斜めの円 C 上の動点 Q をどのように式として表現するかが問われます。**

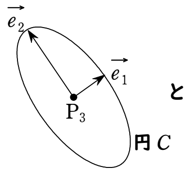
普段 xy 平面上の原点中心，半径 1 の円上の点 P を $P(\cos\theta\,,\,\sin\theta)$ とおく経験はあるでしょう。

これは $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に対して，

$$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta)\vec{e_1}+(\sin\theta)\vec{e_2}$$

と表現するということに他なりません。

これを



と設定することで，今回の動点 Q を

$$\overrightarrow{P_3Q}=(\cos\theta)\vec{e_1}+(\sin\theta)\vec{e_2}$$

と設定することを目論みます。

$\vec{e_1}$ については (3) で求めたベクトルのうちの 1 本でよいでしょう。

そこで，$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix}$ と設定します。

$\vec{e_2}$ については，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}c\\d\\e\end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{cases}\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0\\ \vec{e_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0\\ c^2+d^2+e^2=1\end{cases}$

$\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ なので，$\begin{cases}\frac{\sqrt{5}}{5}c-\frac{2\sqrt{5}}{5}d=0\ \cdots(\text{ア})\\ 2c+d-2e=0\ \cdots(\text{イ})\\ c^2+d^2+e^2=1\ \cdots(\text{ウ})\end{cases}$ という連立方程式を解けばよいわけです。

(ア) より，$c=2d$ で，(イ) に代入すれば，$5d-2e=0$，すなわち $e=\frac{5}{2}d$ を得て，c，e が d を用いて表せましたから，これらを (ウ) に代入することで，$4d^2+d^2+\frac{25}{4}d^2=1$ で，$d^2=\frac{4}{45}$，$d=\pm\frac{2\sqrt{5}}{15}$ を得ます。

つまり，$(c\,,\,d\,,\,e)=\left(\pm\frac{4\sqrt{5}}{15}\,,\,\pm\frac{2\sqrt{5}}{15}\,,\,\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ を得るため，

$\vec{e_2}$ としてはこのうちの 1 本，$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{5}}{15}\\ \frac{2\sqrt{5}}{15}\\ \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$ として設定してあげればよいでしょう。(解答では天下り的に記述してしまいます。)

こうなると，あとは

$$\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}}=(\cos\theta)\overrightarrow{e_1}+(\sin\theta)\overrightarrow{e_2}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}}\\&=\begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{5}}{15}\sin\theta\\\frac{2\sqrt{5}}{15}\sin\theta\\\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{13}{3}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta+\frac{4\sqrt{5}}{15}\sin\theta,\ -\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+\frac{2\sqrt{5}}{15}\sin\theta,\ -\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right)$$

というように，Q の座標が得られるため，Q の xy 平面との距離 d は

$$d=\left|-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right|$$

となるため，$\sin\theta=-1$ となるときが最大となります。

【解答】

(1) $\mathrm{P_1P_2}=\sqrt{(5-3)^2+\{0-(-1)\}^2+(-1-1)^2}=3$ …【答】

(2) S_1，S_2 の半径の和は $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

S_1，S_2 の半径の差の絶対値は $|\sqrt{5}-\sqrt{2}|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

中心間距離 $\mathrm{P_1P_2}=3$

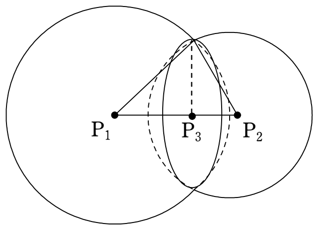
$3^2-(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=2+2\sqrt{10}>0$

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-3^2=2\sqrt{10}-2=\sqrt{40}-\sqrt{4}>0$

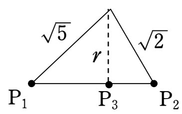
ゆえに，$(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2<3^2<(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ で，辺々正の値なので

$$\sqrt{5}-\sqrt{2}<3<\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

すなわち，
(S_1，S_2 の半径の差の絶対値)<(中心間距離)<(S_1，S_2 の半径の和)
が成り立ち，S_1，S_2 は交わりをもつ。



円 C の半径を r とすると
$\mathrm{P_1P_3}=\sqrt{5-r^2}$
$\mathrm{P_2P_3}=\sqrt{2-r^2}$



$\mathrm{P_1P_3}+\mathrm{P_2P_3}=\mathrm{P_1P_2}$ より，$\sqrt{5-r^2}+\sqrt{2-r^2}=3$

$\sqrt{5-r^2}=3-\sqrt{2-r^2}$ であり，両辺 2 乗すると

$$5-r^2=9-6\sqrt{2-r^2}+(2-r^2)$$

これより，$\sqrt{2-r^2}=1$ を得るため，$2-r^2=1$ で，$r^2=1$

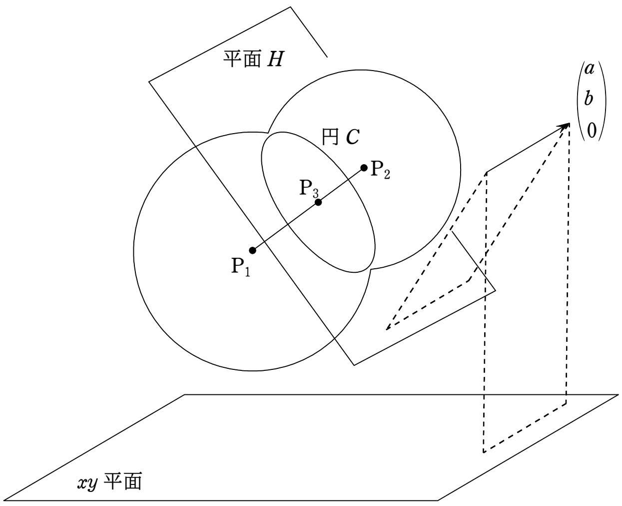
$r>0$ より $r=1$ …【答】

このとき，$\mathrm{P_1P_3}=\sqrt{5-1}=2$，$\mathrm{P_2P_3}=\sqrt{2-1}=1$ より，
$\mathrm{P_3}$ は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ を 2 : 1 に内分する点であるため

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}}{2+1}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

以上から $\mathrm{P_3}\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ …【答】

(3)



求めるベクトルを $\vec{e}$ とおくと，xy 平面に平行なので $\vec{e}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ と表せる。

$|\vec{e}|=1$ のときを考えるため，$\sqrt{a^2+b^2}=1$ ，すなわち

$$a^2+b^2=1 \ \cdots ①$$

$\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ は平面 H と垂直であるため，平面 H と平行な $\vec{e}$ とも垂直であるから，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$，すなわち $2a+b=0$ ⋯②

② より $b=-2a$ で，① に代入すると $a^2+4a^2=1$

これより，$a^2=\dfrac{1}{5}$ を得るため，

$$(a,\ b)=\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\ \mp\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\ (\text{複号同順})$$

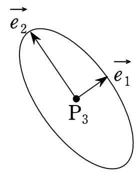
求めるベクトルは $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \mp\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$ (複号同順) ⋯【答】

(4) (3) で求めた単位ベクトルの 1 つ $\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix}$ を $\overrightarrow{e_1}$ とする。

平面 H 上にあり，$\overrightarrow{e_1}$ と直交する単位ベクトル $\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\\\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\\\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$ を考える。

$$※\ \begin{cases}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{15}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{15}=0\\[2mm]\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{e_2}=2\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{15}+1\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{15}-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{8\sqrt{5}+2\sqrt{5}-10\sqrt{5}}{15}=0\end{cases}$$

半径 1 の円 C 上の点 Q に対して



$$\overrightarrow{P_3Q}=(\cos\theta)\overrightarrow{e_1}+(\sin\theta)\overrightarrow{e_2}\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$$

と表せる。

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{P_3Q}$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{13}{3}\\-\dfrac{1}{3}\\-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta\\-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\sin\theta\\\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\sin\theta\\\dfrac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\end{pmatrix}$$

$d=\left|\overrightarrow{OQ}\text{ の } z \text{ 成分}\right|=\left|-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right|$ であるため，

$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で，d は最大値 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}$ ⋯【答】 をとる。

このとき，$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}\dfrac{13}{3}-\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\\-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\\-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{65-4\sqrt{5}}{15}\\-\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}\\-\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

よって，d が最大となるときの点 Q の座標は

$$\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\frac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)\ \cdots【答】$$

【総括】

それなりにレールは敷いてありますが，状況を見失ってしまったという受験生も少なくはないでしょう。

立式を補助するような図があればスムーズですが，律儀に描こうとしすぎて混乱してしまったり無駄に時間を失ってしまう可能性も十分あります。

あくまで簡易的な図として割り切った図を書いてしまえば何を目指せばよいのかという目標が見えやすくなり，式も立ちやすくなるでしょう。

また，最後の斜めの円上を動く動点 Q をどのように立式するかという部分については，差がつく要素です。

普段 xy 平面において，半径 1 の円上の動点 P を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおきますが，この作業を $\overrightarrow{OP}=(\cos\theta)\overrightarrow{e_1}+(\sin\theta)\overrightarrow{e_2}$ というようにベクトルで解釈しなおし，本問のように応用させるということは，ベクトルの成分と座標についての「確固たる理解」がないとできません。