n を 2 以上の整数とする。それぞれ A，A，B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を左から右に並べ，n 文字の文字列を作る。作った文字内に AAA の並びがある場合は不可とする。また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

(1) p_2，q_2，r_2 をそれぞれ求めよ。また，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いてそれぞれ表せ。

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ。

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし，i は虚数単位である。

(4) $p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ。

＜ ’24 東北大 ＞

【戦略 1】

(1) **p_2 とは文字列が AA となる確率**

q_2 とは文字列が BA となる確率

r_2 とは文字列が AB となる確率

ということで，
$$\begin{cases} p_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9} \\ q_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9} \\ r_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$$
となります。

また，$n+1$ 文字並んで末尾 2 つが AA とは，AAA が許されないことを考えると

□□ … □ BA かつ，$n+1$ 文字目がA

$n+1$ 文字並んで末尾 2 つが BA とは，BB が許されないことを考えると

□□ … □ AB かつ，$n+1$ 文字目がA

$n+1$ 文字並んで末尾が B とは，n 文字目が A なのは確定で

□□ … □ AA かつ，$n+1$ 文字目がB

または

□□ … □ BA かつ，$n+1$ 文字目がB

となるため，
$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}$$
という漸化式が立ちます。

(2) **(1) で漸化式が立っていれば，**

$$\begin{aligned} p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}&=\frac{2}{3}q_n+\frac{4}{3}r_n+2\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right) \\ &=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n) \end{aligned}$$

と，数列 $\{p_n+2q_n+2r_n\}$ が公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であることが分かります。

初項が $p_2+2q_2+2r_2$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} p_n+2q_n+2r_n&=(p_2+2q_2+2r_2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ &=\frac{2^n}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

と捌けます。

(3) **(2) と同様，**

$$\begin{aligned} p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}&=\frac{2}{3}q_n+\frac{2i}{3}r_n-(1+i)\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right) \\ &=-\frac{1+i}{3}\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\} \end{aligned}$$

と，虚数単位 i を含むものの，数列 $\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$ が公比 $-\dfrac{1+i}{3}$ の等比数列であることが分かります。

これより，

$$\begin{aligned} p_n+iq_n-(1+i)r_n&=(p_2+iq_2-(1+i)r_2)\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2} \\ &=\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

となります。

(4) **$p_n=r_n$ となるための必要十分条件を考えるにあたり，(2)，(3) から q_n を消去することを考えます。**

そこで，(3) で得た等式の両辺に $2i$ をかけると

$$2ip_n-2q_n-2i(1+i)r_n=\frac{4i}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

を得ます。

(2) で得た等式 $p_n+2q_n+2r_n=\dfrac{2^n}{3^{n-1}}$ と併せて辺々加えると

$$(p_n+4r_n)+(2p_n-2r_n)i=\frac{2^n}{3^{n-1}}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot i\cdot(1+i)^{n-2}$$

を得ます。$p_n=r_n$ となるための必要十分条件は

右辺の虚部が 0

ということなので，ド・モアブルの定理を駆使しながら右辺の虚部に集中しましょう。

【解 1】

(1) p_2 とは文字列が AA となる確率で，$p_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$ …【答】

q_2 とは文字列が BA となる確率で，$q_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$ …【答】

r_2 とは文字列が AB となる確率で，$r_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ …【答】

p_{n+1} とは $\overbrace{\square\square\square\cdots\square\ \mathrm{B}}^{n\text{ 文字}}\ \mathrm{A}\ \mathrm{A}$ となる確率で，$p_{n+1}=q_n\cdot\dfrac{2}{3}$

q_{n+1} とは $\overbrace{\square\square\square\cdots\square\ \mathrm{A}}^{n\text{ 文字}}\ \mathrm{B}\ \mathrm{A}$ となる確率で，$q_{n+1}=r_n\cdot\dfrac{2}{3}$

r_{n+1} とは

$$\overbrace{\square\square\square\cdots\square\ \mathrm{A}\ \mathrm{A}}^{n\text{ 文字}}\ \mathrm{B}$$

または

$$\overbrace{\square\square\square\cdots\square\ \mathrm{B}\ \mathrm{A}}^{n\text{ 文字}}\ \mathrm{B}$$

となる確率で，$r_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{1}{3}+q_n\cdot\dfrac{1}{3}$

以上から，$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}$ …【答】

(2) $$p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{4}{3}r_n+2\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right)$$
$$=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$$

ゆえに，$p_n+2q_n+2r_n=(p_2+2q_2+2r_2)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$

$$=\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}$$

$$=\frac{2^n}{3^{n-1}}\ \text{…【答】}$$

(3) $$p_{n+1}+i\,q_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{2i}{3}r_n-(1+i)\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right)$$

$$=-\frac{1+i}{3}p_n+\frac{1-i}{3}q_n+\frac{2i}{3}r_n$$

$$=-\frac{1+i}{3}\left\{p_n-\frac{1-i}{1+i}q_n-\frac{2i}{1+i}r_n\right\}$$

$$=-\frac{1+i}{3}\{p_n+i\,q_n-(1+i)r_n\}$$

よって，

$$p_n+i\,q_n-(1+i)r_n=(p_2+i\,q_2-(1+i)r_2)\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

$$=\left\{\frac{4}{9}+\frac{2}{9}i-\frac{2}{9}(1+i)\right\}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}\ \text{…【答】}$$

(4) (3) より，$2i\,p_n-2\,q_n-2i(1+i)r_n=\dfrac{4i}{9}\left(-\dfrac{1+i}{3}\right)^{n-2}$ …①

(2) より，$p_n+2\,q_n+2\,r_n=\dfrac{2^n}{3^{n-1}}$ …②

①＋② より，$(1+2i)p_n+(4-2i)r_n=\dfrac{4i}{9}\left(-\dfrac{1+i}{3}\right)^{n-2}+\dfrac{2^n}{3^{n-1}}$

$$(p_n+4r_n)+(2p_n-2r_n)i=\frac{2^n}{3^{n-1}}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot i\cdot(1+i)^{n-2}$$

$$=\frac{2^n}{3^{n-1}}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot i\cdot(\sqrt{2})^{n-2}\left(\cos\frac{n-2}{4}\pi+i\sin\frac{n-2}{4}\pi\right)$$

$$=\frac{2^n}{3^{n-1}}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n-2}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n-2}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{2^n}{3^{n-1}}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left\{-\sin\frac{n-2}{4}\pi+i\cos\frac{n-2}{4}\pi\right\}$$

$p_n=r_n \iff$ (右辺の虚部)$=0$

$$\iff \frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\cos\frac{n-2}{4}\pi=0$$

$$\iff \cos\frac{n-2}{4}\pi=0$$

$$\iff \frac{n-2}{4}\pi=\frac{2m-1}{2}\pi\quad(m\text{ は整数})$$

$$\iff n=4m$$

よって，$p_n=r_n$ となるための必要十分条件は，

n が 4 の倍数であること …【答】

【戦略 2】(4) について

(3) で得た

$$p_n+i\,q_n-(1+i)\,r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

の両辺について共役な複素数をとることにより

$$p_n-i\,q_n-(1-i)\,r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}$$

となるため，ここから辺々加えて q_n を消去するということもできます。

【解 2】(4) について

(4)　(3) より，$p_n+i\,q_n-(1+i)\,r_n=\dfrac{2}{9}\left(-\dfrac{1+i}{3}\right)^{n-2}$ …①

① の両辺について共役複素数を考えると

$$p_n-i\,q_n-(1-i)\,r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}\ \cdots②$$

①+② より

$$2p_n-2r_n=\frac{2}{9}\left\{\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$9p_n-9r_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left\{(1+i)^{n-2}+(1-i)^{n-2}\right\}$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left\{\left(\cos\frac{n-2}{4}\pi+i\sin\frac{n-2}{4}\pi\right)+\left(\cos\frac{n-2}{4}\pi-i\sin\frac{n-2}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\cdot 2\cos\frac{n-2}{4}\pi$$

よって，$p_n=r_n \iff \cos\dfrac{n-2}{4}\pi=0$

$\iff \dfrac{n-2}{4}\pi=\dfrac{2m-1}{2}\pi$　(m は整数)

$\iff n=4m$

よって，$p_n=r_n$ となるための必要十分条件は，

n が 4 の倍数であること …【答】

【総括】

問題文が長く，見た目のゴツさとは裏腹に，この長い文章は丁寧な説明文であることが解き終わると実感できるでしょう。

(2)，(3) を

$$p_{n+1}+2\,q_{n+1}+2\,r_{n+1}$$
$$p_{n+1}+i\,q_{n+1}-(1+i)\,r_{n+1}$$

を計算してみろ

という SOS サインを見逃すと，遭難してしまいます。

(4) は q_n の消去さえ目論めれば (2)，(3) がありますので何とかなりますが，q_n を消去しにいくという方向性をスムーズに見抜けたかどうかは差がつく部分かと思います。

◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇　参考　◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

今回の連立漸化式

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}$$

は

$$\begin{aligned} r_{n+2}&=\frac{1}{3}p_{n+1}+\frac{1}{3}q_{n+1} \\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}r_n \\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}r_{n-1}+\frac{2}{9}r_n \end{aligned}$$

と，数列 $\{r_n\}$ のみの漸化式に帰着でき，番号を上げれば，

$$r_{n+3}-\frac{2}{9}r_{n+1}-\frac{4}{27}r_n=0$$

を得ます。

これは

$$\begin{cases} r_{n+3}+\dfrac{2}{3}r_{n+2}+\dfrac{2}{9}r_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(r_{n+2}+\dfrac{2}{3}r_{n+1}+\dfrac{2}{9}r_n\right) \\ r_{n+3}+\dfrac{-1+i}{3}r_{n+2}+\dfrac{-2-2i}{9}r_{n+1}=\dfrac{-1+i}{3}\left(r_{n+2}+\dfrac{-1+i}{3}r_{n+1}+\dfrac{-2-2i}{9}r_n\right) \\ r_{n+3}+\dfrac{-1-i}{3}r_{n+2}+\dfrac{-2+2i}{9}r_{n+1}=\dfrac{-1-i}{3}\left(r_{n+2}+\dfrac{-1-i}{3}r_{n+1}+\dfrac{-2+2i}{9}r_n\right) \end{cases}$$

と 3 通りに変形できるため，少々億劫ですが，実際に解くことも可能です。