2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2) a，b を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。

＜ '24 東京大 ＞

【戦略】

(1) $f(n)=n\,(n^2+10n+20)$ であり，これが素数ということは n が

$$\begin{cases} n=1 \\ n=-1 \\ n^2+10n+20=1 \\ n^2+10n+20=-1 \end{cases}$$

を満たしている可能性しかないため，これらを個別検証していきます。

(2) $h(x)=x^2+ax+b$ とすると，$g(n)=n\cdot h(n)$ という積の形ですからこれが素数となるためには，

$$\begin{cases} n=1 \text{ かつ } a+b+1\in P & \cdots\text{(i)} \\ n=-1 \text{ かつ } a-b-1\in P & \cdots\text{(ii)} \\ n=p\in P \text{ かつ } p^2+ap+b=1 & \cdots\text{(iii)} \\ n=-q\ (\ q\in P\ ) \text{ かつ } q^2-aq+b=-1 & \cdots\text{(iv)} \end{cases}$$

のいずれかのタイプである必要があります。

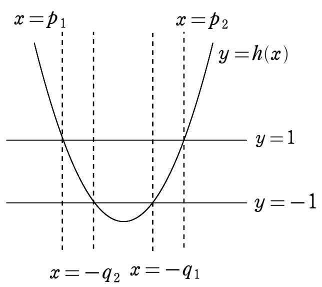
$n=1$，-1 は具体的な数なのですが，(iii)，(iv) の個数が気になります。

(iii)，(iv) はそれぞれ p，q についての 2 次方程式なので

(iii) を満たす素数 p は高々 2 個，(iv) を満たす素数 q は高々 2 個

ということに注意します。

ざっくりと絵を書いてみると，



であり，$p_1<-q_2\leqq -q_1<p_2$ と，符号的におかしなことになっています。

つまり，(iii) と (iv) は同時に成り立たないことが予想され，細々としたケースも含めてこの予想を示しにいきます。

(iii) と (iv) が同時に成立しない中で，題意の n が 4 個以上になるとすると

$n=1$，-1，p_1，p_2 （p_1，p_2 は (iii) を満たす素数）

$n=1$，-1，$-q_1$，$-q_2$ （q_1，q_2 は (iv) を満たす素数）

となるしかありません。

ゆえに，このケースをそれぞれ潰しにいきます。

前者のとき，p_1，p_2 は $h(x)=1$，すなわち $x^2+ax+b-1=0$ の解ですから，解と係数の関係から

$$p_1+p_2=-a$$

となりますが，$g(1)=a+b+1$，$g(-1)=a-b-1$ がともに素数なので $g(1)+g(-1)=2a>0$ で，$a>0$ なので，$p_1+p_2<0$ となって矛盾します。

後者のとき，q_1，q_2 は $h(-x)=-1$，すなわち $x^2-ax+b+1=0$ の解ですから，解と係数の関係から

$$\begin{cases} q_1+q_2=a \\ q_1q_2=b+1 \end{cases}$$

となりますが，$g(-1)=a-b-1$ が素数なので，$a-b-1>0$ です。

よく見ると，これは $q_1+q_2-q_1q_2>0$ で，$q_1q_2-q_1-q_2<0$ です。

つまり，$(q_1-1)(q_2-1)<1$ となり，q_1，q_2 が素数であることからこの不等式は成り立たないため矛盾します。

【解答】

(1)　$f(n)=n\,(n^2+10n+20)$

$f(n)$ が素数となるとき

$$\begin{cases} n=1 & \cdots(\text{ア}) \\ n=-1 & \cdots(\text{イ}) \\ n^2+10n+20=1 & \cdots(\text{ウ}) \\ n^2+10n+20=-1 & \cdots(\text{エ}) \end{cases}$$

となっている必要がある。

(ア) のとき，$f(1)=31$ (＝素数) で，$n=1$ は題意を満たす。

(イ) のとき，$f(-1)=-11$ で素数でない。

(ウ) のとき，$n^2+10n+19=0$ で $n=-5\pm\sqrt{6}$ で n は整数でない。

(エ) のとき，$n^2+10n+21=0 \iff (n+3)(n+7)=0$
よって，$n=-3,\ -7$

$f(-3)=3$ (＝素数)，$f(-7)=7$ (＝素数)
で，$n=-3,\ -7$ は題意を満たす。

以上から，求める n は $n=1,\ -3,\ -7$ …【答】

(2)　$h(x)=x^2+ax+b$ とすると，$g(n)=n\,(n^2+an+b)=n\cdot h(n)$

素数全体の集合を P とするとき，$g(n)$ が素数となるとき

$$\begin{cases} n=1 \text{ かつ } h(1)\in P \\ n=-1 \text{ かつ } -h(-1)\in P \\ n=p\in P \text{ かつ } h(p)=1 \\ n=-q\ (\ q\in P\ ) \text{ かつ } h(-q)=-1 \end{cases}$$

すなわち

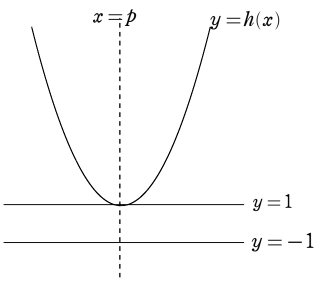
$$\begin{cases} n=1 \text{ かつ } a+b+1\in P & \cdots(\text{i}) \\ n=-1 \text{ かつ } a-b-1\in P & \cdots(\text{ii}) \\ n=p\in P \text{ かつ } p^2+ap+b=1 & \cdots(\text{iii}) \\ n=-q\ (\ q\in P\ ) \text{ かつ } q^2-aq+b=-1 & \cdots(\text{iv}) \end{cases}$$

という 4 つのタイプが考えられる。

(iii) を満たす素数 p は高々 2 個，(iv) を満たす素数 q は高々 2 個であることに注意する。

[1]　(iii) を満たす p が存在するとき

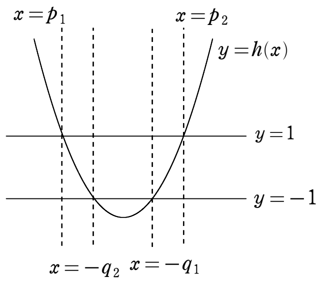
[1−1]　(iii) を満たす素数 p がちょうど 1 つ存在するとき



$h(-q)=-1$ なる素数 q は存在しない。

[1−2]　(iii) を満たす相異なる素数 p_1，p_2 $(p_1<p_2)$ が存在するとき

このとき，(iv) を満たす素数 q_1，q_2 $(q_1\leqq q_2)$ が存在すると仮定する。



このとき
$p_1<-q_2\leqq -q_1<p_2$
となり，矛盾する。

[1−1]，[1−2] から，(iii) を満たす素数 p が存在するとき，(iv) を満たす素数 q は存在しない。

つまり，(iii) と (iv) が同時に満たされることはない。… (*)

[2]　$g(1)$，$g(-1)$ がともに素数であるとき

[2−1]　(iii) を満たす素数 p が 2 個存在する
[2−2]　(iv) を満たす素数 q が 2 個存在する

ということがあり得ないことを示す。

[2−1]　(iii) を満たす素数 p が 2 個存在すると仮定し，それらを p_1，p_2 とすると，p_1，p_2 は $h(x)=1$，すなわち

$$x^2+ax+b-1=0$$

の解であるため，解と係数の関係から

$$p_1+p_2=-a$$

ここで，$g(1)$，$g(-1)$ がともに素数であるため

$$\begin{cases} a+b+1\in P \\ a-b-1\in P \end{cases}$$

であり，$(a+b+1)+(a-b-1)>0$

すなわち，$2a>0 \iff a>0$

これより，$p_1+p_2<0$ となり，p_1，$p_2\in P$ より矛盾する。

[2−2]　(iv) を満たす素数 q が 2 個存在すると仮定し，それらを q_1，q_2 とすると，q_1，q_2 は $h(-x)=-1$，すなわち

$$x^2-ax+b+1=0$$

の解であるため，解と係数の関係から

$$\begin{cases} q_1+q_2=a \\ q_1q_2=b+1 \end{cases}$$

ここで，(ii) が満たされていることから，$a-b-1\in P$ であり，$a-b-1>0$

ゆえに，$(q_1+q_2)-q_1q_2>0 \iff q_1q_2-q_1-q_2<0$

よって，$(q_1-1)(q_2-1)<1$ で，q_1，$q_2\in P$ より矛盾する。

まとめると，$g(1)$，$g(-1)$ が素数であるとき

(iii) を満たす素数 p が存在するとしたら高々 1 個
(iv) を満たす素数 q が存在するとしたら高々 1 個
$(*)$ より，(iii)，(iv) が同時に満たされることはない

以上から，$g(n)$ が素数となる整数 n は 3 個以下である。

【総括】

(1) は確実に確保したい問題です。

問題は (2) ですが，$g(n)$ が素数であることから

$$\begin{cases} n=1 \text{ かつ } h(1)\in P \\ n=-1 \text{ かつ } -h(-1)\in P \\ n=p\in P \text{ かつ } h(p)=1 \\ n=-q \ (\ q\in P\ ) \text{ かつ } h(-q)=-1 \end{cases}$$

という 4 タイプあるという部分までは看破したいところです。

解答中の (iii)，(iv) が同時に成り立たないことを看破する部分が大きな山場ですが，グラフを駆使したりして試行錯誤していくうちに「おかしな状況じゃない？」と気づく必要があります。

式だけでなく，グラフを用いて視覚的に考えてみたりするなど，総合的な思考力・試行力が必要な問題です。