座標空間内に 3 点 A$(1,0,0)$，B$(0,1,0)$，C$(0,0,1)$をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

＜ '24 東京大 ＞

【戦略】

空間における回転体の体積の手順としては

① **回転軸に垂直に切る**

② **切った切り口を回転軸周りに回す。**

③ **最大距離と最小距離に注目して断面積を得る。**

④ **回転軸方向に積分する。**

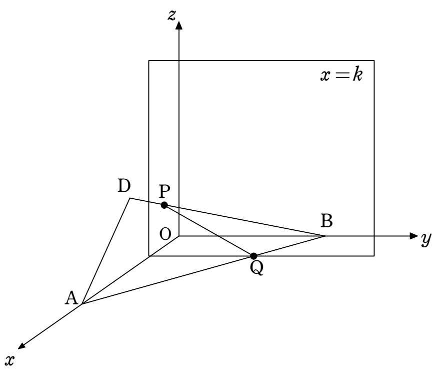
ということで，それぞれのプロセスをしっかりと処理していきます。

まず，回転軸に垂直に $x=k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ **で切ります。**

このとき，$0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ **のときと，**$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ **のときで切り口の線分の両端がどの辺にあるかが変わってきます。**

まず $0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ **のときを考えます。**

このときは，切り口の線分の両端の点を $\begin{cases}\text{線分 BD 上の点 P}\\ \text{線分 AB 上の点 Q}\end{cases}$ **として考えることができます。**



P は線分 BD 上，Q は線分 AB 上の点なので，実数 s，t **を用いて**

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}s\\1-s\\\frac{1}{2}s\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\t\\0\end{pmatrix}$$

と表せます。

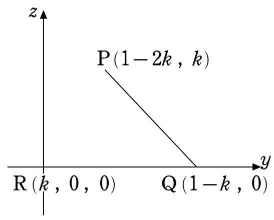
P，Q は平面 $x=k$ **上であることを考えると，**$\begin{cases}\frac{1}{2}s=k\\1-t=k\end{cases}$ **，すなわち**

$s=2k$，$t=1-k$ **を得ますので**

$$\mathrm{P}(k,\ 1-2k,\ k),\ \mathrm{Q}(k,\ 1-k,\ 0)$$

となります。

これを $x=k$ **という平面上で見ると**



これを R$(k,0,0)$ **を中心に回すことになります。**

このとき，最大距離と最小距離について見ます。

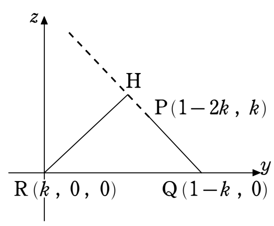
$$\mathrm{RP}^2=(1-2k)^2+k^2=5k^2-4k+1$$
$$\mathrm{RQ}^2=(1-k)^2=k^2-2k+1$$

であり，$\mathrm{RP}^2-\mathrm{RQ}^2=4k^2-2k=2k(2k-1)\leqq 0$ $\left(\because\ 0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$

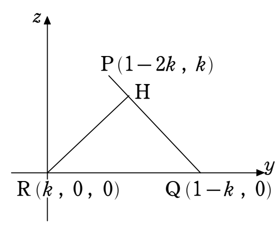
ですから，$\mathrm{RP}<\mathrm{RQ}$ **となり，最大距離は** RQ **ということになります。**

次に最小距離ですが，R **から直線** PQ **に下ろした垂線の足** H **が線分** PQ **上にあるかどうかで場合分けが発生します。**

具体的には



(図 1)



(図 2)

という状況です。

直線 PQ **が平面** $x=k$ **上で，傾き** -1 **で** $(1-k,\ 0)$ **を通る直線であることを考えると，**$z=-y+1-k$，**すなわち** $y+z+k-1=0$ **という直線として表されます。**

よって，直線 RH **は傾きが** 1 **で原点を通る直線ということで，**$z=y$ **です。**

これら 2 **直線の式を連立することで，**$y=-y+1-k$，**すなわち** $y=\dfrac{1-k}{2}$ **を得ますから，**$\mathrm{H}\left(\dfrac{1-k}{2},\ \dfrac{1-k}{2}\right)$ **となります。**

よって，

$\dfrac{1-k}{2}<1-2k$ $\left(0\leqq k<\dfrac{1}{3}\right)$ **のとき** (図 1) **の状況**

$\dfrac{1-k}{2}>1-2k$ $\left(\dfrac{1}{3}<k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ **のとき** (図 2) **の状況**

となります。（等号については解答ではどちらかに含めておきます。）

RH については，点と直線の距離公式

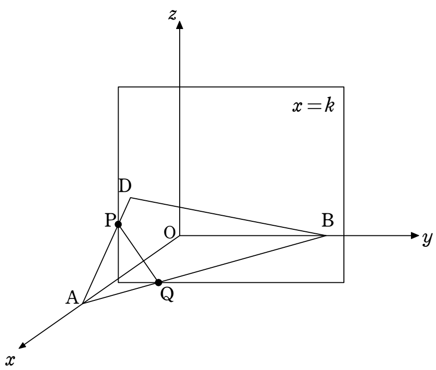
$$\mathrm{RH}=\frac{|k-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1-k}{\sqrt{2}}$$

と求めればよいでしょう。(あるいは直角二等辺三角形の辺の比率を用いてもよい。)

$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ のときについては，切り口の線分の両端の点を

$$\begin{cases}\text{線分 AD 上の点 P}\\ \text{線分 AB 上の点 Q}\end{cases}$$

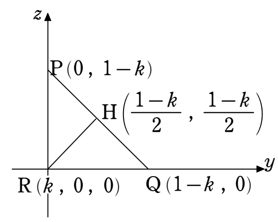
として考えることができます。



このとき，P は実数 s を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(1-s)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-s\\0\\s\end{pmatrix}$$

と表せ，P が平面 $x=k$ 上の点であることから $1-s=k$，すなわち $s=1-k$ を得るため，$\mathrm{P}(k,\ 0,\ 1-k)$ となり，



となります。

このシチュエーションでは，

最大距離は $\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}=1-k$，最小距離は $\mathrm{RH}=\frac{1-k}{\sqrt{2}}$

となります。

ここまで整理出来たら，あとは一本道です。

【解答】

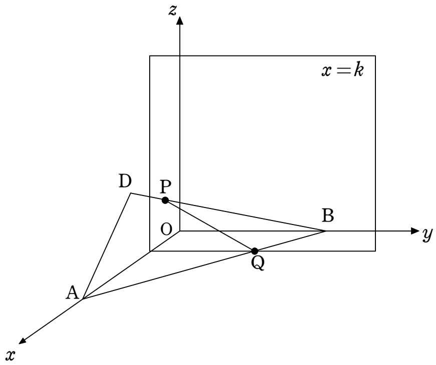
三角形 ABD を平面 $x=k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ で切ったときを考える。

[1]　$0\leqq k\leqq\frac{1}{2}$ のとき

このとき，切り口の線分の両端の点は

線分 BD 上と，線分 AB 上

にある。(線分 BD 上の点を P，線分 AB 上の点を Q とする。)



このとき，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}s\\1-s\\\frac{1}{2}s\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\t\\0\end{pmatrix}$$

と表せるため，P，Q が平面 $x=k$ 上の点であることも考えると

$$\begin{cases}\frac{1}{2}s=k\\ 1-t=k\end{cases}$$

すなわち，$s=2k$，$t=1-k$ を得る。

ゆえに，$\mathrm{P}(k,\ 1-2k,\ k)$，$\mathrm{Q}(k,\ 1-k,\ 0)$ となる。

以下，$\mathrm{R}(k,\ 0,\ 0)$ として，$x=k$ という平面上の yz 平面を考え，

$\mathrm{P}(1-2k,\ k)$，$\mathrm{Q}(1-k,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0)$

と表記する。

直線 PQ は傾き -1 で $(1-k,\ 0)$ を通るので，$z=-\{y-(1-k)\}$ すなわち $z=-y+1-k$ と表せる。

R から直線 PQ に下ろした垂線の足を H とすると，直線 RH は $z=y$ と表せるため，これら 2 式を連立すると

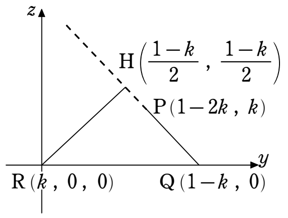
$y=-y+1-k$，すなわち $y=\frac{1-k}{2}$ を得るため，

$$\mathrm{H}\left(\frac{1-k}{2},\ \frac{1-k}{2}\right)$$

また，
$$\begin{aligned}\mathrm{RP}^2-\mathrm{RQ}^2&=\{(1-2k)^2+k^2\}-(1-k)^2\\&=4k^2-2k\\&=2k(2k-1)\leqq 0\quad\left(\because\ 0\leqq k\leqq\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{RP}\leqq\mathrm{RQ}$

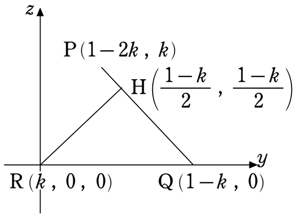
[1−1]　$\dfrac{1-k}{2} \leqq 1-2k$，すなわち $0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき



このとき，題意の立体を $x=k$ で切ったときの切り口の面積は

$$\begin{aligned}\pi \mathrm{RQ}^2-\pi \mathrm{RP}^2&=\pi\{\mathrm{RQ}^2-\mathrm{RP}^2\}\\&=\pi(-4k^2+2k)\end{aligned}$$

[1−2]　$1-2k \leqq \dfrac{1-k}{2}$，すなわち $\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



このとき，題意の立体を $x=k$ で切ったときの切り口の面積は

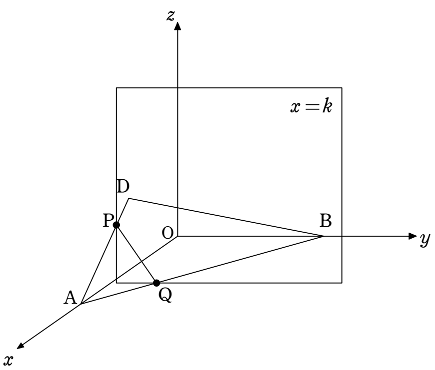
$$\begin{aligned}\pi \mathrm{RQ}^2-\pi \mathrm{RH}^2&=\pi\{\mathrm{RQ}^2-\mathrm{RH}^2\}\\&=\pi\left\{(1-k)^2-\left(\frac{1-k}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}\\&=\frac{\pi}{2}(1-k)^2\end{aligned}$$

[2]　$\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

このとき，切り口の線分の両端の点は

線分 AD 上と，線分 AB 上

にある。(線分 AD 上の点を P，線分 AB 上の点を Q とする。)



Q については [1] のときと同様，Q$(k, 1-k, 0)$ と表せる。

P は線分 AD 上の点なので，実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-s)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-s\\0\\s\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。

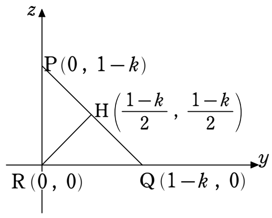
P は平面 $x=k$ 上の点なので，$1-s=k$，すなわち $s=1-k$ を得る。

つまり，P$(k, 0, 1-k)$ である。

[1] のとき同様 R$(k, 0, 0)$ とし，$x=k$ という平面上の yz 平面を考え，

P$(0, 1-k)$，Q$(1-k, 0)$，R$(0, 0)$

と表記する。



このとき，題意の立体を $x=k$ で切ったときの切り口の面積は

$$\begin{aligned}\pi \mathrm{RP}^2-\pi \mathrm{RH}^2&=\pi\{\mathrm{RP}^2-\mathrm{RH}^2\}\\&=\pi\left\{(1-k)^2-\left(\frac{1-k}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}\\&=\frac{\pi}{2}(1-k)^2\end{aligned}$$

以上，[1−1]，[1−2]，[2] より，求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\frac{1}{3}}\pi(-4k^2+2k)\,dk+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}(1-k)^2\,dk+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\pi}{2}(1-k)^2\,dk\\&=2\pi\int_0^{\frac{1}{3}}(-2k^2+k)\,dk+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-k)^2\,dk\\&=2\pi\left[-\frac{2}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2\right]_0^{\frac{1}{3}}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}(1-k)^3\right]_{1}^{\frac{1}{3}}\\&=2\pi\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\right)+\frac{\pi}{6}\left\{0-\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right\}\\&=\frac{\pi}{9}\quad\cdots【答】\end{aligned}$$

【総括】

三角形というシンプルな図形の回転体の体積を求めるという，題意も非常に明確な問題ですが，切り口の線分の両端が三角形のどの辺上にくるかで場合分けが生じ，さらにその中で最小距離によって場合分けが生じるため，整理力が問われます。

ベクトル方程式を駆使して切り口の線分の両端の点の座標を考える部分など，本問の一連の流れについては過去問演習などを通じて手慣れている必要がありますが，そのあたり東大はこのトピックスの過去問が豊富です。

過去問をしっかりとやりこんで仕上げてきた受験生であれば心理的にも慌てずに立ち向かえたはずです。