2024 年度 東京大学 理系 第 4 問

$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく。 $0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t\,,\,f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_t とする。

(1) 円 C_t の中心の座標を $(\,c\,(t)\,,\,0\,)$，半径を $r\,(t)$ とおく。 $c\,(t)$ と $\{r\,(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2) 実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3\,,\,a\,)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか。

＜ '24 東京大 ＞

【戦略】

(1) **放物線と円が共通接線をもつということで，様々な翻訳が考えられますが，本問はこの円の中心が x 軸上にあるという設定ですからそれを活かして**

法線と x 軸との交点が $(\,c\,(t)\,,\,0\,)$

と翻訳することにします。

出来る限り記号のまま整理していき，具体的な代入は最後の最後にする方が手際が良いでしょう。

(2) **円 C_t の方程式は $\{\,x-c\,(t)\,\}^2+y^2=\{r(t)\}^2$ であり，これが $(3\,,\,a\,)$ を通るとき，**

$$\{\,3-c\,(t)\,\}^2+a^2=\{r(t)\}^2 \ \cdots(☆)$$

となります。

求める t の個数は，この $(☆)$ を満たす $t\,(0<t<4)$ の個数，すなわち $(☆)$ という t の方程式の $0<t<4$ における実数解の個数です。

そうなってくると，形から

$$a^2=\{r(t)\}^2-\{\,3-c\,(t)\,\}^2$$

と，「定数分離」した形で見たくなるでしょう。

あとは，(1) から右辺は具体的に計算できます。

忍耐強く計算してみると，

$$(\textbf{右辺})=\frac{1}{16}\{\,(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2\,\}$$

となります。

これ以上展開するのも大変なので，このまま

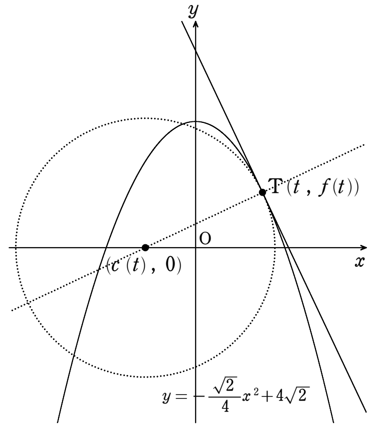
$$g(t)=\frac{1}{16}\{\,(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2\,\}$$

とおき，$g'(t)$ の計算から増減表，グラフに突入します。

もちろん微分計算の際には積の微分法，合成関数の微分法をミスなく駆使して計算していくことになります。

【解答】

(1) 放物線 $C : y=f(x)$ とする。



C_t と放物線 C との共通接線の接点を $\mathrm{T}\,(t\,,\,f(t))$ とする。

T における放物線 C の法線と x 軸との交点が円 C_t の中心である。

この法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$$

これが $(\,c\,(t)\,,\,0\,)$ を通るので

$$0=-\frac{1}{f'(t)}(\,c\,(t)-t\,)+f(t)$$

両辺 $f'(t)$ をかけて整理すると，

$$c\,(t)=f(t)f'(t)+t \ \cdots ①$$

よって，

$$c(t)=-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2-16)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+t$$
$$=\frac{1}{4}t^3-3t \ \cdots【答】$$

また，
$$\begin{aligned}\{r(t)\}^2&=\{\,t-c(t)\,\}^2+\{f(t)\}^2\\&=\{\,-f(t)f'(t)\,\}^2+\{f(t)\}^2 \quad (\because\ ①)\\&=\{f(t)\}^2\{\,1+\{f'(t)\}^2\,\}\\&=\frac{1}{8}(t^2-16)^2\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)\\&=\frac{1}{16}(t^2-16)^2(t^2+2) \ \cdots【答】\end{aligned}$$

(2) 円 C_t の方程式は $\{\,x-c\,(t)\,\}^2+y^2=\{r(t)\}^2$

これが $(3\,,\,a\,)$ を通るとき，$\{\,3-c\,(t)\,\}^2+a^2=\{r(t)\}^2$

$$\begin{aligned}a^2&=\{r(t)\}^2-\{\,3-c\,(t)\,\}^2\\&=\frac{1}{16}(t^2-16)^2(t^2+2)-\left\{\,3-\frac{1}{4}t^3+3t\,\right\}^2\\&=\frac{1}{16}(t^2-16)^2(t^2+2)-\left\{-\frac{1}{4}(t^3-12t-12)\right\}^2\\&=\frac{1}{16}\{\,(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2\,\}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{16}\{\,(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2\,\}=a^2 \ \cdots(*)$

求める円 C_t が $(3\,,\,a\,)$ を通るような $0<t<4$ なる t の個数は，$(*)$ の $0<t<4$ における実数解の個数であり，それは

$$g(t)=\frac{1}{16}\{\,(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2\,\}\ (0<t<4)$$

としたときの，$y=g(t)$ と $y=a^2$ の交点の個数である。

$g(t)=\dfrac{1}{16}\left\{(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2\right\}$ に対して

$$g'(t)=\frac{1}{16}\left\{2(t^2-16)\cdot(2t)\cdot(t^2+2)+(t^2-16)^2\cdot(2t)-2(t^3-12t-12)\cdot(3t^2-12)\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\left\{4t(t^2-16)(t^2+2)+2t(t^2-16)^2-6(t^3-12t-12)(t^2-4)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{2t(t^2-16)(t^2+2)+t(t^2-16)^2-3(t^3-12t-12)(t^2-4)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{(t^2-16)\left\{2t(t^2+2)+t(t^2-16)\right\}-3(t^3-12t-12)(t^2-4)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{(t^2-16)(3t^3-12t)-3(t^3-12t-12)(t^2-4)\right\}$$

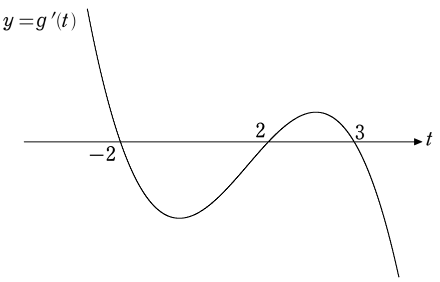
$$=\frac{1}{8}\left\{3t(t^2-16)(t^2-4)-3(t^3-12t-12)(t^2-4)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{3(t^2-4)\left\{t(t^2-16)-(t^3-12t-12)\right\}\right\}$$

$$=\frac{3}{8}(t^2-4)(-4t+12)$$

$$=-\frac{3}{2}(t^2-4)(t-3)$$

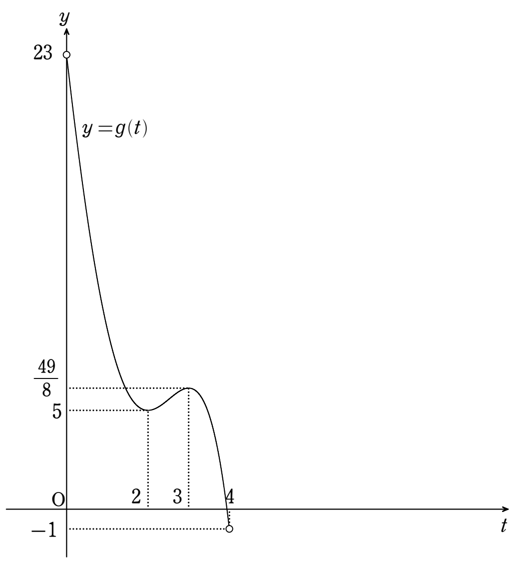
$$=-\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$$



よって，$g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	23	↘	5	↗	$\frac{49}{8}$	↘	-1

これより，$y=g(t)$ の $0<t<4$ におけるグラフは以下のようになる。



$0<a<f(3)$，すなわち $0<a<\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ であることを考えると，

$0<a^2<\dfrac{49}{8}$ であるため，この範囲において $y=g(t)$ と $y=a^2$ の交点の個数は，

$$\begin{cases} 5<a^2<\dfrac{49}{8} \text{ のとき，求める } t \text{ の個数は 3 個} \\ a^2=5 \text{ のとき，求める } t \text{ の個数は 2 個} \\ 0<a^2<5 \text{ のとき，求める } t \text{ の個数は 1 個} \end{cases}$$

ゆえに，円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような t $(0<t<4)$ の個数は

$$\begin{cases} \sqrt{5}<a<\dfrac{7\sqrt{2}}{4} \text{ のとき 3 個} \\ a=\sqrt{5} \text{ のとき 2 個} \\ 0<a<\sqrt{5} \text{ のとき 1 個} \end{cases} \quad \cdots【答】$$

【総括】

やること自体は明確であり，定数分離という手法自体も定番のものですが，処理面での手際の良さが求められます。

なお，解答中の $g(t)$ を最後まで展開しきると

$$g(t)=-\frac{3}{8}t^4+\frac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$$

となり，$g'(t)$ は

$$g'(t)=-\frac{3}{2}t^3+\frac{9}{2}t^2+6t-18$$
$$=-\frac{3}{2}(t^3-3t^2-4t+12)$$
$$=-\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$$

となります。