2024年度 東京大学 理系 第3問

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って1秒ごとに動く点Pを考える。

(i) 最初に，Pは点 $(2,\ 1)$ にいる。

(ii) ある時刻でPが点 $(a,\ b)$ にいるとき，その1秒後にはPは

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし，(1) については，結論のみを書けばよい。

(1) Pがとりうる点の座標をすべて求めよ。

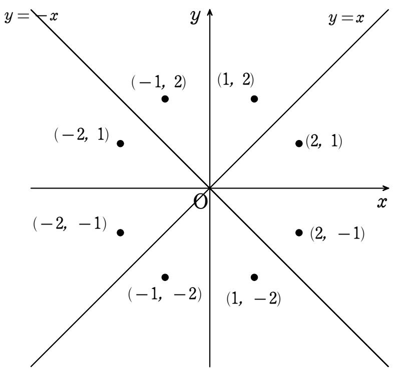
(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後にPが点 $(2,\ 1)$ にいる確率と，最初から n 秒後にPが点 $(-2,\ -1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後にPが点 $(2,\ 1)$ にいる確率を求めよ。

＜ '24 東京大 ＞

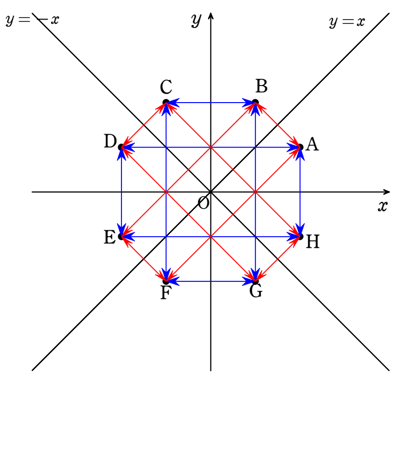
【戦略】

(1) **落ち着いてスタートの $(2,\ 1)$ から行き着く可能性のある点を書き出していきましょう。**



(2) **限られたシチュエーションの推移を考えるということで，漸化式の導入を考えたくなります。**

A $(2,\ 1)$ とし，そこから反時計回りに B，C，D，E，F，G，H と名前を付け，n 秒後に A，B，C，D，E，F，G，H にいる確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n,\ e_n,\ f_n,\ g_n,\ h_n$ と設定します。



今回示すべきは $a_n=e_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ ですから

$n+1$ 秒後に A $(2,\ 1)$ にいる確率 a_{n+1}

$n+1$ 秒後に E $(-2,\ -1)$ にいる確率 e_{n+1}

について見ていきます。

本来 $n=1,\ 2,\ \cdots$ で考えるべき数列たちですが，

$$a_0=1,\quad b_0=c_0=d_0=e_0=f_0=g_0=h_0=0$$

と考えれば，自然に定義域を拡張できます。

今回示すべきは $a_n=e_n$ ですが，$a_0 \fallingdotseq e_0$ であることには注意しましょう。

$n+1$ 秒後に A $(2,\ 1)$ にいる確率 a_{n+1} は

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=b_n\cdot\frac{1}{6}+d_n\cdot\frac{1}{3}+f_n\cdot\frac{1}{6}+h_n\cdot\frac{1}{3}\\ &=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n+\frac{1}{6}f_n+\frac{1}{3}h_n \end{aligned}$$

$n+1$ 秒後に E $(-2,\ -1)$ にいる確率 e_{n+1} は

$$\begin{aligned} e_{n+1}&=b_n\cdot\frac{1}{6}+d_n\cdot\frac{1}{3}+f_n\cdot\frac{1}{6}+h_n\cdot\frac{1}{3}\\ &=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n+\frac{1}{6}f_n+\frac{1}{3}h_n \end{aligned}$$

と全く同じ漸化式が立ちます。

つまり，$a_{n+1}=e_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ ということで，これは

$$a_n=e_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

であることを意味するため，題意が示されたことになります。

(3) **(2) を皮切りに，$\begin{cases} b_n=f_n \\ c_n=g_n \\ d_n=h_n \end{cases}$ では？と思えたらしめたものです。**

(2) と同様にして

$$\begin{cases} b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{1}{6}e_n+\dfrac{1}{3}g_n \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{6}d_n+\dfrac{1}{3}f_n+\dfrac{1}{6}h_n \\ d_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{6}c_n+\dfrac{1}{3}e_n+\dfrac{1}{6}g_n \\ f_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{1}{6}e_n+\dfrac{1}{3}g_n \\ g_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{6}d_n+\dfrac{1}{3}f_n+\dfrac{1}{6}h_n \\ h_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{6}c_n+\dfrac{1}{3}e_n+\dfrac{1}{6}g_n \end{cases}$$

と漸化式が立つため，$\begin{cases} b_n=f_n \\ c_n=g_n \\ d_n=h_n \end{cases}$ であることが示せます。

これにより，実質は a_n，b_n，c_n，d_n のみを相手にすればよいことになります。

具体的には
$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{1}{3}d_n+\dfrac{1}{6}f_n+\dfrac{1}{3}h_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{1}{6}e_n+\dfrac{1}{3}g_n \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{6}d_n+\dfrac{1}{3}f_n+\dfrac{1}{6}h_n \\ d_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{6}c_n+\dfrac{1}{3}e_n+\dfrac{1}{6}g_n \end{cases}$$

なのですが，これが

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{2}{3}d_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}c_n \\ c_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n \\ d_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}c_n \end{cases}$$

となるわけです。

a_{n+1}，c_{n+1} というペアと，b_{n+1}，d_{n+1} というペアで考えると

$$\begin{cases} a_{n+1}+c_{n+1}=b_n+d_n \\ b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n \end{cases},\quad \begin{cases} a_{n+1}-c_{n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n \\ b_{n+1}-d_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{3}c_n \end{cases}$$

となり，
$$\begin{cases} a_{n+2}+c_{n+2}=b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n \\ a_{n+2}-c_{n+2}=-\dfrac{1}{3}(b_{n+1}-d_{n+1})=\dfrac{1}{9}(a_n-c_n) \end{cases}$$

と，2 個飛ばしの漸化式が得られるので，n の偶奇による場合分けが発生します。

ただ，例えば，n が偶数のとき，勢い余って

$$a_n+c_n=a_{n-2}+c_{n-2}=\cdots\cdots=a_2+c_2=a_0+c_0$$

としてはなりません。

先ほど述べたように，$n=0$ のときのみ $a_n=e_n$ が言えません。

n の定義域についてもう一度確認しておきます。

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{1}{3}d_n+\dfrac{1}{6}f_n+\dfrac{1}{3}h_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{1}{6}e_n+\dfrac{1}{3}g_n \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{6}d_n+\dfrac{1}{3}f_n+\dfrac{1}{6}h_n \\ d_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{6}c_n+\dfrac{1}{3}e_n+\dfrac{1}{6}g_n \end{cases}$$ は $n=0,1,2,\cdots$ で言えます。

ただ，ここから $a_n=e_n$ を用いて変形するところのみ $n=1,2,\cdots$ でしか成り立たなくなります。

つまり，

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{2}{3}d_n & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}c_n & (n=1,2,3,\cdots) \\ c_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n & (n=0,1,2,\cdots) \\ d_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}c_n & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

ということになるわけです。

これにより，

$n=1,2,\cdots$　　$n=1,2,\cdots$

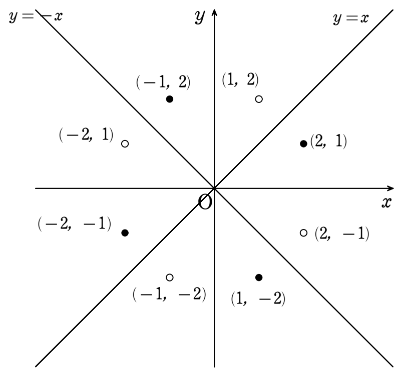
$$\begin{cases} a_{n+2}+c_{n+2}=b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n \\ a_{n+2}-c_{n+2}=-\dfrac{1}{3}(b_{n+1}-d_{n+1})=\dfrac{1}{9}(a_n-c_n) \end{cases}$$

$n=1,2,\cdots$　　$n=1,2,\cdots$

というように，$n=1,2,\cdots$ で $\begin{cases} a_{n+2}+c_{n+2}=a_n+c_n \\ a_{n+2}-c_{n+2}=\dfrac{1}{9}(a_n-c_n) \end{cases}$

が成り立つことになります。

この規則の移動では

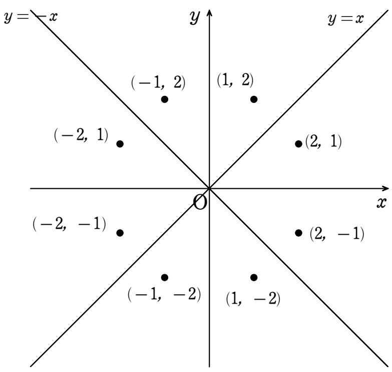


●から移動できる点は○，○から移動できる点は●であり，A$(2,1)$ からスタートして奇数秒後にA$(2,1)$ にいることはないため，n が奇数のときは $a_n=0$ です。(解答では念のため式で示すことにします。)

よって，n が偶数のときに集中すればよいでしょう。

【解答】

(1)　動点Pがとりうる点の座標は以下(図1)の8点である。



(図1)

(2)　A(2, 1)とし，そこから反時計回りにB, C, D, E, F, G, Hとする。

n 秒後にA, B, C, D, E, F, G, Hにいる確率をそれぞれ

$$a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n,\ e_n,\ f_n,\ g_n,\ h_n$$

とする。

規則(i)を0秒後にAにいると解釈し，

$$a_0=1,\quad b_0=c_0=d_0=e_0=f_0=g_0=h_0=0$$

と考えてよい。

このとき，$n+1$ 秒後にAにいる確率 a_{n+1} $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ は

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=b_n\cdot\frac{1}{6}+d_n\cdot\frac{1}{3}+f_n\cdot\frac{1}{6}+h_n\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n+\frac{1}{6}f_n+\frac{1}{3}h_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}$$

$n+1$ 秒後にEにいる確率 e_{n+1} は

$$\begin{aligned}e_{n+1}&=b_n\cdot\frac{1}{6}+d_n\cdot\frac{1}{3}+f_n\cdot\frac{1}{6}+h_n\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n+\frac{1}{6}f_n+\frac{1}{3}h_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}$$

よって，$a_{n+1}=e_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ であり，

$$a_n=e_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるため，題意は示された。

(3)　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$\begin{cases}b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{6}e_n+\frac{1}{3}g_n\\c_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{6}d_n+\frac{1}{3}f_n+\frac{1}{6}h_n\\d_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{6}c_n+\frac{1}{3}e_n+\frac{1}{6}g_n\end{cases}\quad\begin{cases}f_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{6}e_n+\frac{1}{3}g_n\\g_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{6}d_n+\frac{1}{3}f_n+\frac{1}{6}h_n\\h_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{6}c_n+\frac{1}{3}e_n+\frac{1}{6}g_n\end{cases}$$

ゆえに，$\begin{cases}b_{n+1}=f_{n+1}\\c_{n+1}=g_{n+1}\\d_{n+1}=h_{n+1}\end{cases}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，すなわち

$$\begin{cases}b_n=f_n\\c_n=g_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\\d_n=h_n\end{cases}$$

が成立するが，実際には $n=0$ のときも成立する。

$n=0$ のときには $a_n\fallingdotseq e_n$ であることを考えると

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n+\frac{1}{6}f_n+\frac{1}{3}h_n\\&=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}d_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}$$

$n=0$ のとき $a_n\fallingdotseq e_n$ なので，この等号が成立するのは $n\geqq1$ のときです。

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{6}e_n+\frac{1}{3}g_n\\&=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{6}d_n+\frac{1}{3}f_n+\frac{1}{6}h_n\\&=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}d_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{n+1}&=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{6}c_n+\frac{1}{3}e_n+\frac{1}{6}g_n\\&=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

$$a_{n+2}+c_{n+2}=b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$a_{n+2}-c_{n+2}=-\frac{1}{3}(b_{n+1}-d_{n+1})=\frac{1}{9}(a_n-c_n)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

[1]　n が奇数のとき

$$a_n+c_n=a_{n-2}+c_{n-2}=\cdots\cdots=a_1+c_1=0+0=0$$

$$a_n-c_n=\frac{1}{9}(a_{n-2}-c_{n-2})=\cdots\cdots=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}(a_1-c_1)=0$$

これら2式から，$a_n=0,\ c_n=0$

[2]　n が偶数のとき

$$a_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2+\left(\frac{1}{6}\right)^2\times2=\frac{5}{18},\quad c_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\times4=\frac{2}{9}$$

$$a_n+c_n=a_{n-2}+c_{n-2}=\cdots\cdots=a_2+c_2=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}a_n-c_n&=\frac{1}{9}(a_{n-2}-c_{n-2})=\cdots\cdots=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}(a_2-c_2)\\&=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

まとめると，$\begin{cases}a_n+c_n=\frac{1}{2}&\cdots①\\a_n-c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n&\cdots②\end{cases}$

$\dfrac{①+②}{2}$ より，$a_n=\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

以上より，求める確率は

$$\begin{cases}n\text{ が偶数のとき}\quad\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}\\n\text{ が奇数のとき}\quad0\end{cases}\quad\cdots【答】$$

【総括】

漸化式の設定は問題文中で与えられておらず，自分で設定することになります。

確率の難問では漸化式を持ち出すか否かという判断まで問われることになりますが，本問の場合，限られたシチュエーションの推移を考えることになるため漸化式を持ち出したくなるはずです。

a_0，b_0，…，h_0 と，$n=0$ のときまで拡張して考えたはいいものの，実際に決め手となる $a_n=e_n$ という対称性が $n=0$ のときに成り立たないということに気を付けましょう。

なお，n 秒後に

「A または E にいる」という確率を A_n

「B または F にいる」という確率を B_n

「C または G にいる」という確率を C_n

「D または H にいる」という確率を D_n

とすると，

$$A_n=a_n+e_n,\ B_n=b_n+f_n,\ C_n=c_n+g_n,\ D_n=d_n+h_n$$

であり，$A_n+B_n+C_n+D_n=1$ となります。

$$A_{n+1}=a_{n+1}+e_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}d_n+\frac{1}{3}f_n+\frac{2}{3}h_n=\frac{1}{3}B_n+\frac{2}{3}D_n$$

となります。他も同様にして $\begin{cases} A_{n+1}=\frac{1}{3}B_n+\frac{2}{3}D_n \\ B_{n+1}=\frac{1}{3}A_n+\frac{2}{3}C_n \\ C_{n+1}=\frac{2}{3}B_n+\frac{1}{3}D_n \\ D_{n+1}=\frac{2}{3}A_n+\frac{1}{3}C_n \end{cases}$ …（☆）が言えます。

本解答の $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}d_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}d_n \\ d_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}c_n \end{cases}$ …（★） と形は同じですが，

（★）の式の定義域が $n\geqq 0$ だったり $n\geqq 1$ だったりだったのに対して，

（☆）の全ての式の定義域は $n\geqq 0$ です。

よって，$\begin{cases} A_{n+2}+C_{n+2}=A_n+C_n \\ A_{n+2}-C_{n+2}=\frac{1}{9}(A_n-C_n) \end{cases}$ を得た後，n が偶数のとき

$$\begin{cases} A_n+C_n=A_0+C_0 \\ A_n-C_n=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}(A_0-C_0) \end{cases}$$

と A_0，C_0 まで番号を下げることができます。

これにより，$\begin{cases} A_n+C_n=1 \\ A_n-C_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$ となり，

$$A_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\ (n=0,\ 2,\ 4,\ \cdots)$$

すなわち，$a_n+e_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ $(n=0,\ 2,\ 4,\ \cdots)$ が言えます。

$n=1,\ 2,\ \cdots$ では $a_n=e_n$ が成り立つため，

$$2a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\ (n=2,\ 4,\ \cdots)$$

すなわち，$a_n=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ $(n=2,\ 4,\ \cdots)$ と求めることができます。