以下の問いに答えよ。

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする。正の実数 x が２つの条件

(a) $x>\dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x\geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式

$$x+1>2\log_t(x+1)$$

を示せ。

(2) $n\leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

< ’24 東北大 >

【戦略】

(1) **条件 (b) において，x を $x+1$ にしても成立することを示すわけです。**

条件 (b) を基に考えると

$$\begin{aligned} x+1 &\geqq 2\log_t x+1 \\ &=\log_t x^2+\log_t t \\ &=\log_t tx^2 \end{aligned}$$

となります。ここからさらに，$\log_t tx^2>2\log_t(x+1)$，すなわち

$$\log_t tx^2>\log_t(x+1)^2$$

が言えれば解決です。

$t>1$ なので，$tx^2>(x+1)^2$，すなわち $tx^2-(x+1)^2>0$ が示せれば勝ちなのですが，条件 (a) を利用することを考えると

$$\begin{aligned} tx^2-(x+1)^2 &=\{\sqrt{t}x+(x+1)\}\{\sqrt{t}x-(x+1)\} \\ &=\{(\sqrt{t}+1)x+1\}\{(\sqrt{t}-1)x-1\} \end{aligned}$$

と，因数分解を狙っていきたくなります。

(2) **示すべき不等式の対数の底が 2 なので，(1) において $t=2$ のときを考えます。**

すると，$\begin{cases} x>\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\ (=\sqrt{2}+1) \\ x\geqq 2\log_2 x \end{cases} \implies x+1>2\log_2(x+1)$

ということが言えますから，数学的帰納法の構造が見えると思います。

つまり，$n\leqq 2\log_2 n$ が成り立たなくなり，$n=k$ で $k>2\log_2 k$ が成立したら，$n=k+1$，$k+2$，$\cdots$ で $n>2\log_2 n$ となってしまうということです。

【解答】

(1) 条件 (b) より，

$$\begin{aligned} x+1 &\geqq 2\log_t x+1 \\ &=\log_t x^2+\log_t t \\ &=\log_t tx^2 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} tx^2-(x+1)^2 &=\{\sqrt{t}x+(x+1)\}\{\sqrt{t}x-(x+1)\} \\ &=\{(\sqrt{t}+1)x+1\}\{(\sqrt{t}-1)x-1\} \end{aligned}$$

条件 $t>1$，及び x が正の実数であるという条件から

$$(\sqrt{t}+1)x+1>0$$

また，条件 (a)，及び $\sqrt{t}-1>0$ より，$(\sqrt{t}-1)x>1$
すなわち，$(\sqrt{t}-1)x-1>0$

ゆえに，$tx^2-(x+1)^2>0$ となり，$tx^2>(x+1)^2$

したがって，$t>1$ であるとき，辺々底が t の対数をとると

$$\log_t tx^2>\log_t(x+1)^2=2\log_t(x+1) \cdots ②$$

①，② より，$x+1>2\log_t(x+1)$ が成立する。

(2) $t=2$ とすると，(1) の結果から

x が

$$\begin{cases} x>\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\ (=\sqrt{2}+1) \\ x\geqq 2\log_2 x \end{cases} \implies x+1>2\log_2(x+1) \cdots (*)$$

が成り立つ。

$n=1$ に対しては，$1>2\log_2 1\ (=0)$

$n=2$ に対しては，$2=2\log_2 2\ (=2)$

$n=3$ に対しては，$3=\log_2 8\leqq 2\log_2 3$

$n=4$ に対しては，$4=\log_2 16=2\log_2 4$

$n=5$ に対しては，$5=\log_2 32>2\log_2 5$

$n=k\ (\geqq 5)$ のとき，$k\geqq 2\log_2 k$ と仮定すると，$(*)$ より

$$k+1>2\log_2(k+1)$$

ゆえに，帰納的に $n\geqq 5$ に対して，$n>2\log_2 n$

以上より，$n\leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n は $n=2$，3，4 …【答】

【総括】

(2) は $\log_2 2^n \leqq \log_2 n^2$，すなわち $2^n \leqq n^2$ を満たす自然数 n を求めるということであり，ノーヒントだと

$$
\begin{aligned}
&n=1 \text{ だと，} 2^1>1^2\\
&n=2 \text{ だと，} 2^2=2^2\\
&n=3 \text{ だと，} 2^3<3^2\\
&n=4 \text{ だと，} 2^4=4^2\\
&n=5 \text{ だと，} 2^5>5^2
\end{aligned}
$$

$n=k\ (k \geqq 5)$ のとき，$2^k>k^2$ と仮定すると，

$$
\begin{aligned}
2^{k+1}-(k+1)^2 &= 2\cdot 2^k-(k+1)^2\\
&> 2k^2-(k^2+2k+1)\\
&= k^2-2k-1\\
&= (k-1)^2-2\\
&> 0 \quad (\because\ k \geqq 5)
\end{aligned}
$$

となり，$2^{k+1}>(k+1)^2$ が成立するため，帰納的に $n \geqq 5$ で $2^n>n^2$

したがって，求める n の値は $n=2$，3，4

という解答になるでしょう。基本的に n が大きくなれば指数関数が爆発的に増加することを考える基本問題です。

本問は帰納法の

$k \geqq 2\log_2 k$ が成り立つと仮定すると，$k+1>2\log_2(k+1)$ が成り立つという部分の橋渡しを (1) で示しているわけですが，正直窮屈感のある誘導にやりづらさを感じた受験生もいたかもしれません。