a を正の実数とし，$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする。 O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y=f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p\,,\,f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q\,,\,f(q))$ とする。ただし，$q>0$ とする。

(1) p，q の値を a を用いて表せ。また，$p>q$ であることを示せ。

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3) (2) の S に対し，$S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

＜ ’24 東北大 ＞

【戦略 1】

(1) **頂点 A については** $f(x)=(x-a)^2+3a^2$ **と平方完成すれば，**

$$\mathrm{A}(a\,,\,3a^2)$$

と分かります。

これより，直線 OA の式が $y=3ax$ **と Get できますから，** $y=f(x)$ **と連立して** y **を消去すると**

$$x^2-5ax+4a^2=0 \iff (x-a)(x-4a)=0$$

という 2 次方程式を得ます。

$x=a$ **は A の** x **座標を与えるため，P の** x **座標** p **は** $p=4a$ **と求まります。**

q **については，判別式の路線と微分の路線がありますが，ここでは微分を用いて捌いていくことを考えます。**

$\mathrm{Q}(q\,,\,q^2-2aq+4a^2)$ **における接線の式**

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

が $(0\,,\,0)$ **を通るというように捌き，** $q^2=4a^2$ **を得ます。**

もちろん条件 $a>0$，$q>0$ **より，** $q=2a$ **と得て解決です。**

$p>q$ **の証明については，** $p-q=2a>0$ **なので，即解決です。**

(2) **P，Q から** x **軸に下ろした垂線の足をそれぞれ H，H′ とすれば**

$$S=\triangle \mathrm{OPH}-\triangle \mathrm{OQH'}-\int_{2a}^{4a}(x^2-2ax+4a^2)\,dx$$

と負担感なく計算できます。

(3) **(2) で正しく計算できていれば，ボーナス問題です。**

【解 1】

(1) $f(x)=(x-a)^2+3a^2$ であり，C の頂点 A の座標は $\mathrm{A}(a\,,\,3a^2)$

直線 OA は傾き $\dfrac{3a^2}{a}=3a$ で原点を通るため，$y=3ax$

これと $y=x^2-2ax+4a^2$ を連立して y を消去すると

$x^2-2ax+4a^2=3ax$ で整理すると，$x^2-5ax+4a^2=0$

すなわち $(x-a)(x-4a)=0$ で $x=a$ は A の x 座標を与えるので P の x 座標は $4a$ であり，$p=4a$ …【答】

$f'(x)=2x-2a$ より，Q における接線は

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

すなわち

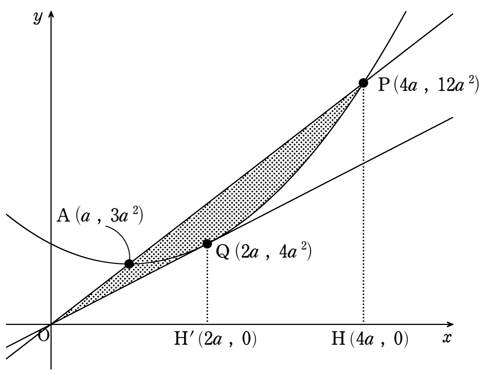
$$y=(2q-2a)x-q^2+4a^2$$

これが $(0\,,\,0)$ を通るので，$-q^2+4a^2=0$

$q^2=4a^2$ で，$q>0$，$a>0$ より，$q=2a$ …【答】

また，$p-q=4a-2a=2a>0$ より，$p>q$ であることが示された。

(2)



$\mathrm{H}(4a\,,\,0)$，$\mathrm{H'}(2a\,,\,0)$ とする。

$\triangle \mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2=24a^3$ ， $\triangle \mathrm{OQH'}=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2=4a^2$

$$\begin{aligned} S&=\triangle \mathrm{OPH}-\triangle \mathrm{OQH'}-\int_{2a}^{4a}(x^2-2ax+4a^2)\,dx \\ &=24a^3-4a^2-\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+4a^2x\right]_{2a}^{4a} \\ &=20a^3-\left\{\frac{1}{3}(64a^3-8a^3)-a(16a^2-4a^2)+4a^2(4a-2a)\right\} \\ &=20a^3-\left(\frac{56}{3}a^3-12a^3+8a^3\right) \\ &=\frac{16}{3}a^3 \quad \cdots【答】 \end{aligned}$$

(3) $S=\dfrac{2}{3}$ となるとき，$\dfrac{16}{3}a^3=\dfrac{2}{3}$，すなわち $a^3=\dfrac{1}{8}$ を得る。

$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\left(a^2+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}\right)=0$で，条件 $a>0$ より，$a=\dfrac{1}{2}$ …【答】

【戦略 2】

(1) **q の導出について，判別式を利用して求める路線も考えてみます。**

原点を通る直線 $y=mx$ が $y=x^2-2ax+4a^2$ と接するときを考えるので，これらを連立して y を消去し，$x^2-2ax+4a^2=mx$，すなわち

$$x^2-(m+2a)x+4a^2=0$$

という 2 次方程式が重解をもつときを考えます。

(2) **直接的な計算だと**

$$\int_0^{2a}\{3ax-2ax\}\,dx+\int_{2a}^{4a}\{3ax-(x^2-2ax+4a^2)\}\,dx$$

となります。

【解 2】

(1) （q の導出に関する部分的別解）

原点を通る直線 $y=mx$ が $y=x^2-2ax+4a^2$ と接するときを考える。

これらを連立して y を消去すると，$x^2-2ax+4a^2=mx$，すなわち

$$x^2-(m+2a)x+4a^2=0$$

これが重解をもつときを考えるので，判別式を D として，$D=0$

$$\begin{aligned}D&=\{-(m+2a)\}^2-4\cdot1\cdot4a^2\\&=m^2+4am-12a^2\end{aligned}$$

より，$m^2+4am-12a^2=0$，すなわち $(m+6a)(m-2a)=0$

ゆえに，$m=-6a$，$2a$

今，直線 OQ の傾きは $\dfrac{f(q)}{q}\left(=\dfrac{q^2-2aq+4a^2}{q}\right)$ より，

$$m=\frac{q^2-2aq+4a^2}{q}$$

$m=-6a$ のとき，$\dfrac{q^2-2aq+4a^2}{q}=-6a$ で整理すると

$$q^2+4aq+4a^2=0$$

すなわち，$(q+2a)^2=0$ を得て，$q=-2a$

条件 $a>0$ より，$q<0$ となり，条件 $q>0$ に反する。

$m=2a$ のとき，$\dfrac{q^2-2aq+4a^2}{q}=2a$ で整理すると

$$q^2-4aq+4a^2=0$$

すなわち，$(q-2a)^2=0$ を得て，$q=2a$

以上から，$q=2a$ …【答】

(2) $S=\displaystyle\int_0^{2a}\{3ax-2ax\}\,dx+\int_{2a}^{4a}\{3ax-(x^2-2ax+4a^2)\}\,dx$

$$=\int_0^{2a}ax\,dx-\int_{2a}^{4a}(x^2-5ax+4a^2)\,dx$$

$$=a\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2a}-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5a}{2}x^2+4a^2x\right]_{2a}^{4a}$$

$$=2a^3-\left\{\frac{1}{3}(64a^3-8a^3)-\frac{5a}{2}(16a^2-4a^2)+4a^2(4a-2a)\right\}$$

$$=2a^3-\left\{\frac{56}{3}a^3-30a^3+8a^3\right\}$$

$$=\frac{16}{3}a^3$$ …【答】

【総括】

状況を丁寧に把握していけば手なりに計算が進みますが，q の導出については判別式の路線だと若干煩雑です。

それでも数値が比較的キレイに求まるように設計されているため，心理的負担は抑えられています。

面積についても多少工夫して【解 1】のように考えてもよいですし，【解 2】のように直接的に考えても大したことはありません。

試験場では落ち着いて確保したい問題と言えましょう。