2024 年度 京都大学 理系 第6問

自然数 k に対して，$a_k=2^{\sqrt{k}}$ とする。n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。次を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である。

＜ '24 京都大 ＞

【戦略】

$a_k\,(=2^{\sqrt{k}})$ の整数部分が n 桁ということを数式的に翻訳すると

$$10^{n-1}\leqq 2^{\sqrt{k}}<10^n$$

ということになり，整理すると

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\leqq k<\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2$$

を得ます。

これを満たす整数 k の個数をカウントするためにはガウス記号を用いる必要性が出てくるため，

$$\left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right]=\alpha,\ \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]=\alpha'$$

と設定することで，

$$N_n=\alpha-\alpha'$$

が得られます。

同様に，a_k の整数部分が n 桁かつ最高位の数字が 1 ということを翻訳すると

$$10^{n-1}\leqq 2^{\sqrt{k}}<2\cdot 10^{n-1}$$

となり，これを整理することで $\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\leqq k<\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2$ を得ます。

同様に $\left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2\right]=\beta$ と設定することで，$L_n=\beta-\alpha'$ が得られ，

$$\frac{L_n}{N_n}=\frac{\beta-\alpha'}{\alpha-\alpha'}$$

となるわけです。

ここで，α，β，α' は
$$\begin{cases}\alpha\leqq\left(\dfrac{n}{\log_{10}2}\right)^2<\alpha+1\\ \beta\leqq\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2<\beta+1\\ \alpha'\leqq\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2<\alpha'+1\end{cases}$$

すなわち，
$$\begin{cases}\left(\dfrac{n}{\log_{10}2}\right)^2-1<\alpha\leqq\left(\dfrac{n}{\log_{10}2}\right)^2\\ \left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2-1<\beta\leqq\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2\\ \left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1<\alpha'\leqq\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\end{cases}$$
と評価できます。

これを用いて，$\dfrac{\beta-\alpha'}{\alpha-\alpha'}$ を上下から不等式で挟んで，はさみうちの原理によって仕留める算段をつけます。

【解答】

a_k の整数部分が n 桁となるとき

$$10^{n-1}\leqq a_k<10^n$$

$$10^{n-1}\leqq 2^{\sqrt{k}}<10^n$$

辺々常用対数をとると，$n-1\leqq\sqrt{k}\log_{10}2<n$

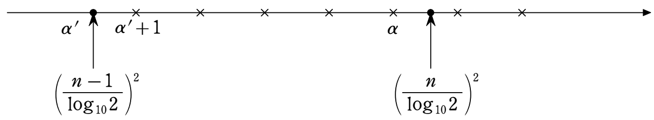
すなわち，$\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\leqq\sqrt{k}<\dfrac{n}{\log_{10}2}$

辺々正の数なので，$\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\leqq k<\left(\dfrac{n}{\log_{10}2}\right)^2$ …①

$[x]$ を x を超えない最大整数とし，

$$\left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right]=\alpha,\ \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]=\alpha'$$

とする。



① を満たす整数 k は，$\alpha'+1$，$\alpha'+2$，…，α の

$$\alpha-(\alpha'+1)+1=\alpha-\alpha'\text{【個】}$$

① を満たす整数 k の個数が N_n であるため，$N_n=\alpha-\alpha'$

一方，a_k の整数部分が n 桁かつ最高位の数字が 1 となるとき

$$10^{n-1}\leqq a_k<2\cdot10^{n-1}$$

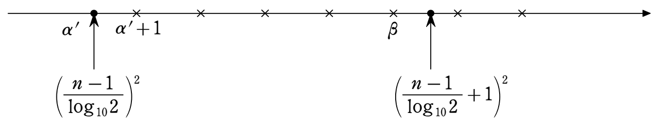
$$10^{n-1}\leqq 2^{\sqrt{k}}<2\cdot10^{n-1}$$

辺々常用対数をとると，$n-1\leqq\sqrt{k}\log_{10}2<(n-1)+\log_{10}2$

すなわち，$\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\leqq\sqrt{k}<\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1$

辺々正の数なので，$\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\leqq k<\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2$ …②

$\left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2\right]=\beta$ とする。



② を満たす整数 k は $\alpha'+1$，$\alpha'+2$，…，β の

$$\beta-(\alpha'+1)+1=\beta-\alpha'\text{【個】}$$

② を満たす整数 k の個数が L_n なので，$L_n=\beta-\alpha'$

以上から，$\dfrac{L_n}{N_n}=\dfrac{\beta-\alpha'}{\alpha-\alpha'}$

ここで，$\alpha \leqq \left(\dfrac{n}{\log_{10}2}\right)^2 < \alpha+1$，すなわち

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-1<\alpha\leqq\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 \quad \cdots ③$$

また，$\beta \leqq \left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2 < \beta+1$，すなわち

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2-1<\beta\leqq\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2 \cdots ④$$

また，$\alpha' \leqq \left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 < \alpha'+1$，すなわち

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1<\alpha'\leqq\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2$$

辺々 -1 をかけると，$-\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq -\alpha' < 1-\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \quad \cdots ⑤$

③＋⑤ より，

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2<\alpha-\alpha'<\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2$$

④＋⑤ より

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2<\beta-\alpha'<\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2$$

これより，

$$\frac{\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2}{\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2}<\frac{\beta-\alpha'}{\alpha-\alpha'}<\frac{\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2}{\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2}$$

$a=\log_{10}2$ とおくと

$$\frac{\left(\frac{n-1}{a}+1\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{a}\right)^2}{\left(\frac{n}{a}\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{a}\right)^2}<\frac{\beta-\alpha'}{\alpha-\alpha'}<\frac{\left(\frac{n-1}{a}+1\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{a}\right)^2}{\left(\frac{n}{a}\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{a}\right)^2}$$

$$(\text{最左辺})=\frac{\left(\frac{n+a-1}{a}\right)^2-1-\left(\frac{n-1}{a}\right)^2}{\frac{1}{a^2}\{n^2+a^2-(n-1)^2\}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}\{(n+a-1)^2-a^2-(n-1)^2\}}{\frac{1}{a^2}\{n^2+a^2-(n-1)^2\}}$$

$$=\frac{(n+a-1)^2-a^2-(n-1)^2}{n^2+a^2-(n-1)^2}$$

$$=\frac{2an-2a}{2n+a^2-1}$$

$$=\frac{2a-\frac{2a}{n}}{2+\frac{a^2-1}{n}} \to a \quad (n\to\infty)$$

$$(\text{最右辺})=\frac{\left(\frac{n+a-1}{a}\right)^2+1-\left(\frac{n-1}{a}\right)^2}{\frac{1}{a^2}\{n^2-a^2-(n-1)^2\}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}\{(n+a-1)^2+a^2-(n-1)^2\}}{\frac{1}{a^2}\{n^2-a^2-(n-1)^2\}}$$

$$=\frac{(n+a-1)^2+a^2-(n-1)^2}{n^2-a^2-(n-1)^2}$$

$$=\frac{2an+2a^2-2a}{2n-a^2-1}$$

$$=\frac{2a+\frac{2a^2-2a}{n}}{2-\frac{a^2-1}{n}} \to a \quad (n\to\infty)$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\beta-\alpha'}{\alpha-\alpha'}=a=\log_{10}2$

以上から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}=\log_{10}2$ …【答】

【総括】

ガウス記号に関する極限自体は，ガウス記号の不等式

$$x-1<[x]\leqq x$$

を用いて，はさみうちの原理で仕留めるというのが定番中の定番です。

ガウス記号に関して何かしらの誘導などがあれば標準と言いたいところですが，誘導がないところが京大らしく，N_n，L_n を具体的に立式するために自分でガウス記号を設定する必要があり，設定力，構想力が求められます。