与えられた自然数 $a_0$ に対して，自然数からなる数列 $a_0$，$a_1$，$a_2$，… を次のように定める。

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{ が偶数のとき})\\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) $a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$ がすべて奇数であるような最小の自然数 $a_0$ を求めよ。

(2) $a_0$，$a_1$，…，$a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 $a_0$ を求めよ。

＜ ’24 京都大 ＞

**【戦略 1】**

(1) **$a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$ が全て奇数ということは**

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

**という規則で $a_1$，$a_2$，$a_3$ が定まっているわけですから，$a_3$ までの一般項が得られます。**

**つまり，$a_{k+1}=\dfrac{3}{2}a_k+\dfrac{1}{2}$ $(k=0,1,2,3)$ であり，この漸化式自体は定番中の定番の処理である特性方程式 $\alpha=\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}$ の解，$\alpha=-1$ を用いた式変形により**

$$a_{k+1}+1=\frac{3}{2}(a_k+1)\ (k=0,1,2,3)$$

**と変形できるため，**

$$a_k+1=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k\ \ (k=0,1,2,3,4)$$

**となります。**

**$a_0$ は奇数であるため，$a_0+1$ は偶数で，素因数 2 はもっていますが，$k=3$ のときなどは $a_3+1=(a_0+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ であり，左辺が整数で，しかも偶数となるためには，$a_0+1$ は素因数 2 を最低でも 4 個持っている必要があります。（分母に 3 つある素因数 2 を消しきるだけでは不十分で，偶数であるためにさらに 1 つ素因数 2 が必要です。）**

**そんな中で，$a_0$ を最小にしようと考えると，$a_0+1=2^4$，すなわち $a_0=15$ が候補です。**

**このとき，$k=0,1,2,3$ に対して**

$$\begin{aligned}a_k&=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\\&=2^4\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\\&=2^{4-k}\cdot3^k-1\\&=(\text{奇数})\end{aligned}$$

**となり，十分性も確認でき，$a_0=15$ が答えとしての資格を得ます。**

(2) **(1) で要領が掴めれば，全く同様の要領でなぞるだけです。**

【解 1】

(1) $a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$ がすべて奇数であるとき，

$$a_{k+1}=\frac{3}{2}a_k+\frac{1}{2}\ \ (k=0,1,2,3)$$

が成立する。

すなわち

$$a_{k+1}+1=\frac{3}{2}(a_k+1)\ (k=0,1,2,3)$$

より，$a_k+1=(a_0+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ $(k=0,1,2,3,4)$

条件から $a_0+1$，$a_1+1$，$a_2+1$，$a_3+1$ は偶数であるため，$a_0+1$ は素因数 2 を最低でも 4 個はもつことになり，

$$a_0+1=2^4\cdot M\ (M\text{ は整数})$$

という形であることが必要である。

この形の最小の $a_0$ は，$a_0=15$

このとき，$k=0,1,2,3$ に対して

$$\begin{aligned}a_k&=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\\&=2^4\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\\&=2^{4-k}\cdot3^k-1\\&=(\text{奇数})\end{aligned}$$

で，題意を満たす。

以上から，求める最小の自然数 $a_0$ は，$a_0=15$ …【答】

(2) $a_0$，$a_1$，…，$a_{10}$ がすべて奇数であるとき，

$$a_{k+1}=\frac{3}{2}a_k+\frac{1}{2}\ \ (k=0,1,\cdots,10)$$

が成立する。

すなわち

$$a_{k+1}+1=\frac{3}{2}(a_k+1)\ (k=0,1,\cdots,10)$$

より，$a_k+1=(a_0+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ $(k=0,1,\cdots,10,11)$

条件から $a_0+1$，$a_1+1$，…，$a_{10}+1$ は偶数であるため，$a_0+1$ は素因数 2 を最低でも 11 個はもつことになり，

$$a_0+1=2^{11}\cdot N\ \ (N\text{ は整数})$$

という形であることが必要である。

この形の最小の $a_0$ は，$a_0=2^{11}-1=2047$

このとき，$k=0,1,2,\cdots,10$ に対して

$$\begin{aligned}a_k&=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\\&=2^{11}\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\\&=2^{11-k}\cdot3^k-1\\&=(\text{奇数})\end{aligned}$$

であり，題意を満たす。

以上から，求める最小の自然数 $a_0$ は，$a_0=2047$ …【答】

【戦略 2】

**例えば，$a_0$，$a_1$ が 2 連続で奇数となるための条件を考えてみます。**

$a_0=2N_0-1$ **とおくと，** $a_1=\dfrac{3(2N_0-1)+1}{2}=3N_0-1$ **です。**

$a_1$ **が奇数であることから，**$3N_0-1=2M_0-1$**，すなわち** $3N_0=2M_0$
**を得ますから，**$N_0$ **は偶数ということになり，**$N_0=2N_1$ **とすることで**

$$a_0=4N_1-1\,(\,=\text{奇数}\,),\ a_1=6N_1-1\,(\,=\text{奇数}\,)$$

**となります。**

**ここからさらに** $a_2$ **も奇数となるときを考えてみます。**

$$a_2=\frac{3(6N_1-1)+1}{2}=9N_1-1$$

**であり，**$a_2$ **が奇数となるとき，**$9N_1-1=2M_1-1$**，すなわち** $9N_1=2M_1$
**を得ますから，**$N_1$ **は偶数ということになり，**$N_1=2N_2$ **とすることで**

$a_0=8N_2-1\,(\,=\text{奇数}\,)$，$a_1=12N_2-1\,(\,=\text{奇数}\,)$，$a_2=18N_2-1\,(\,=\text{奇数}\,)$

**となります。**

**ここでさらに** $a_3$ **が奇数となるときを考えれば (1) が解決しそうですが，**
**(2) まで押し切るのは少々面倒です。**

**ただ，要領自体は掴めており，**

$m$ **個連続奇数だと，スタートの** $a_0$ **は** $a_0=2^mN-1$ **(**$N$ **は整数 )という形**

**であろうことは予想できるため，これを数学的帰納法で裏付けます。**

【解 2】

$m$ を 2 以上の整数として，$a_0$，$a_1$，…，$a_{m-1}$ という $m$ 個の項が全て奇数であるとき，

$a_0=2^mN-1$ ($N$ は整数) という形である …(*)

ことを $m$ についての数学的帰納法で示す。

以下，文字は全て整数であるとする。

[1] $m=2$ のとき

$a_0$，$a_1$ が奇数のときを考える。

$a_0$ が奇数であることから，$a_0=2N_0-1$ とおくと

$$a_1=\frac{3(2N_0-1)+1}{2}=3N_0-1$$

$a_1$ が奇数であることから，$3N_0-1=2M_0-1$
すなわち，$3N_0=2M_0$ であり，$N_0$ は偶数となる。

ゆえに，$N_0=2N_1$ とおくと，$a_0=4N_1-1$ となり，(*) は正しい。

[2] $m=k$ ($k=2$，3，…) のとき

$a_0$，$a_1$，…，$a_{k-1}$ という $k$ 個の項が全て奇数であるとき，

$a_0=2^kN-1$ ($N$ は整数) という形である

と仮定する。

さて，$a_0$，$a_1$，…，$a_{k-1}$，$a_k$ という $k+1$ 個の項が全て奇数であるとき，特に，$a_0$，$a_1$，…，$a_{k-1}$ が全て奇数であるため，仮定から

$a_0=2^kN-1$ ($N$ は整数)

という形で表せる。

このとき，$n=0$，1，2，…，$k-1$ に対して

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

が言えるため，

$$a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}a_k+1&=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k\\&=2^kN\left(\frac{3}{2}\right)^k\\&=N\cdot3^k\end{aligned}$$

$a_k+1$ は偶数であるため，$N\cdot3^k=2M$ と表せ，2 と 3 は互いに素であることから，$N$ が偶数ということになり，$N=2N'$ と表せる。

ゆえに，$a_0=2^k\cdot2N'-1=2^{k+1}N'-1$という形で表せるため，
$m=k+1$ のときも (*) は正しい。

以上 [1]，[2] から，$m=2$，3，… に対して
$a_0$，$a_1$，…，$a_{m-1}$ が奇数であるとき，$a_0=2^mN-1$ という形で表せるということが示された。

(1) $a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$ が全て奇数であるとき，$a_0=2^4N-1$ という形で表されるため，この形の最小の自然数 $a_0$ は $a_0=15$ …【答】

(2) $a_0$，$a_1$，…，$a_{10}$ が全て奇数であるとき，$a_0=2^{11}N-1$ という形で表されるため，この形の最小の自然数 $a_0$ は $a_0=2047$ …【答】

【総括】

条件によって使う漸化式が変わるという設定ですが，結局 $a_0$，$a_1$，… $a_m$ が全て奇数ということは，

$$a_1=\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}$$
$$a_2=\frac{3}{2}a_1+\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$a_{m+1}=\frac{3}{2}a_m+\frac{1}{2}$$

というように，

**そこまでに使っている漸化式は** $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$ **側の方だけ**

という本問の急所的ポイントに気がつけたかどうかでしょう。

使っている漸化式が 1 種類だけであれば，そこまでの一般項を求めることは容易くできるため，手が進みやすくなります。