座標空間の4点O，A，B，Cは同一平面上にないとする。線分OAの中点をP，線分ABの中点をQとする。実数x，yに対して，直線OC上の点Xと，直線BC上の点Yを次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線QYと直線PXがねじれの位置にあるためのx，yに関する必要十分条件を求めよ。

＜ '24 京都大 ＞

【戦略】

ひとまずベクトルの基本である

1つの始点，3つの基底

という言葉に従い，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ と主役のベクトル(基底)を設定し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表していくことを考えます。

直線PX，QYがねじれの位置 ⇔ $\begin{cases}\text{直線PXと直線QYが平行でない}\\ \text{直線PXと直線QYが共有点をもたない}\end{cases}$

ということですが，「平行でない」や「共有点をもたない」などという否定的な主張であるため，いったん

直線PX，QYがねじれの位置でない ⇔ $\begin{cases}\text{直線PXと直線QYが平行} & \cdots① \\ \quad\text{または} & \\ \text{直線PXと直線QYが共有点をもつ} & \cdots②\end{cases}$

と，ねじれの位置とならないための条件を考えていくことにします。

①の翻訳は

$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{QY}}$ となる実数uが存在する。

となります。

②の翻訳は

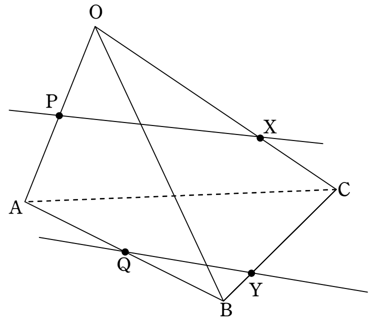
直線PXと直線QYが共有点Zをもつ

すなわち

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{PX}}\\ \overrightarrow{\mathrm{QZ}}=\ell\,\overrightarrow{\mathrm{QY}}\end{cases}$ となる実数k，ℓが存在する。

となります。

【解答】



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$

とすると

Pは線分OAの中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

Qは線分ABの中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\,\vec{c}$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\,\overrightarrow{\mathrm{BC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=(1-y)\vec{b}+y\,\vec{c}$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+x\,\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QY}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}+y\,\vec{c}$$

直線PX，QYがねじれの位置 ⇔ $\begin{cases}\text{直線PXと直線QYが平行でない}\\ \text{直線PXと直線QYが共有点をもたない}\end{cases}$

直線PX，QYがねじれの位置でない ⇔ $\begin{cases}\text{直線PXと直線QYが平行} & \cdots① \\ \quad\text{または} & \\ \text{直線PXと直線QYが共有点をもつ} & \cdots②\end{cases}$

①について

$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{QY}}$ となる実数uが存在する。すなわち

$$-\frac{1}{2}\vec{a}+x\,\vec{c}=-\frac{u}{2}\vec{a}+u\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}+uy\,\vec{c}$$

となる実数uが存在する。

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立なので，

$$\begin{cases}-\dfrac{u}{2}=-\dfrac{1}{2}\\ u\left(\dfrac{1}{2}-y\right)=0\\ uy=x\end{cases} \iff \begin{cases}u=1\\ y=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

すなわち，$x=\dfrac{1}{2}$ かつ $y=\dfrac{1}{2}$

② について

直線 PX と直線 QY が共有点 Z をもつとき

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{PX}}\\ \overrightarrow{\mathrm{QZ}}=\ell\,\overrightarrow{\mathrm{QY}}\end{cases}$ となる実数 k，ℓ が存在する。

これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OZ}}=(1-k)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$
$$=\frac{1-k}{2}\vec{a}+kx\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\ell\left(\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OZ}}=(1-\ell)\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\ell\,\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$
$$=\frac{1-\ell}{2}\vec{a}+\frac{1-\ell}{2}\vec{b}+\ell(1-y)\vec{b}+\ell y\vec{c}$$
$$=\frac{1-\ell}{2}\vec{a}+\frac{1+\ell-2\ell y}{2}\vec{b}+\ell y\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$\begin{cases}\dfrac{1-k}{2}=\dfrac{1-\ell}{2}\\ \dfrac{1+\ell-2\ell y}{2}=0\\ kx=\ell y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\ell\\ \ell\,(2y-1)=1\\ kx=\ell y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\,(2y-1)=1\\ k\,(x-y)=0\end{cases}$$

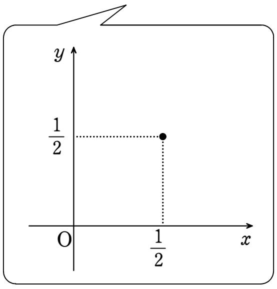
これを満たす実数 $k\,(=\ell)$ が存在するので，

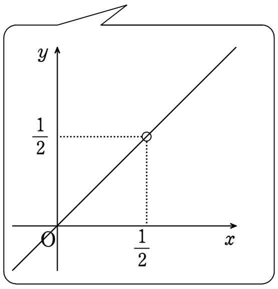
$$x=y \text{ かつ } y\fallingdotseq\frac{1}{2}$$

以上より，直線 PX，QY がねじれの位置でない

$\Leftrightarrow$ ① または ②

$\Leftrightarrow$ 「$x=\dfrac{1}{2}$ かつ $y=\dfrac{1}{2}$」または 「$x=y$ かつ $y\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$」





$\Leftrightarrow$ $x=y$

ゆえに，直線 PX，QY がねじれの位置となるための必要十分条件は

$$x\fallingdotseq y \quad \cdots【答】$$

【戦略 2】

「① または ②」 をさらに欲張って

$$\begin{cases}\textbf{直線 PX と直線 QY が平行} & \cdots①\\ \qquad\textbf{または} & \\ \textbf{直線 PX と直線 QY が共有点をもつ} & \cdots②\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ P，Q，X，Y が同一平面上

と翻訳し，共面条件に帰着させることもできます。

【解 2】部分的別解

直線 PX，QY がねじれの位置でない $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{直線 PX と直線 QY が平行} & \cdots①\\ \qquad\text{または} & \\ \text{直線 PX と直線 QY が共有点をもつ} & \cdots②\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ P，Q，X，Y が同一平面上

$\overrightarrow{\mathrm{PY}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を満たす実数 α，β が存在するときを考える。

このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)+\beta\left(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}+(1-y)\vec{b}+y\vec{c}=\alpha\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+\beta\left(x\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}+(1-y)\vec{b}+y\vec{c}=-\frac{\beta}{2}\vec{a}+\frac{\alpha}{2}\vec{b}+\beta x\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるため，$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\beta}{2}\\ 1-y=\dfrac{\alpha}{2}\\ y=\beta x\end{cases}$

すなわち，$\begin{cases}\beta=1\\ \alpha=2\,(1-y)\\ y=x\end{cases}$

これを満たす実数 α，β が存在するための x，y についての必要十分条件は

$$x=y$$

ゆえに，直線 PX，QY がねじれの位置となるための必要十分条件は

$$x\fallingdotseq y \quad \cdots【答】$$

【総括】

２直線がねじれの位置にあるということを「誤解なく言いかえる」力が求められました。

『～～となる実数●が **存在する** 』というように『語尾がしっかりと意識された答案』を書きたいところです。