$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ。

＜ '24 京都大 ＞

【戦略 1】

複素数 z は x，y という 2 つの複素数によって定まります。

今回，x，y はお互いに干渉することなく，独立に動くため，

片方を固定し，1 つずつ動かす

という「予選決勝法」の考え方で捌いていくことを考えます。

$y=y_0$ **などと固定してみると，** $z=\dfrac{x+y_0}{2}$ **ということになります。**

このとき，z が満たすべき関係式を Get するために，$x=2z-y_0$ として x を縛っている関係式 $|x| \leqq 2$ に代入することで $|2z-y_0| \leqq 2$，すなわち

$$\left|z-\frac{y_0}{2}\right| \leqq 1$$

を得ることになります。

ここで，固定していた y を動かします。

y **は $|y-(8+6i)|=3$ を満たすように動くため，**

$$\left|\frac{y}{2}-(4+3i)\right|=\frac{3}{2}$$

を満たしており，先ほどの円の中心 $\dfrac{y}{2}$ は，点 $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円上を動くことになります。

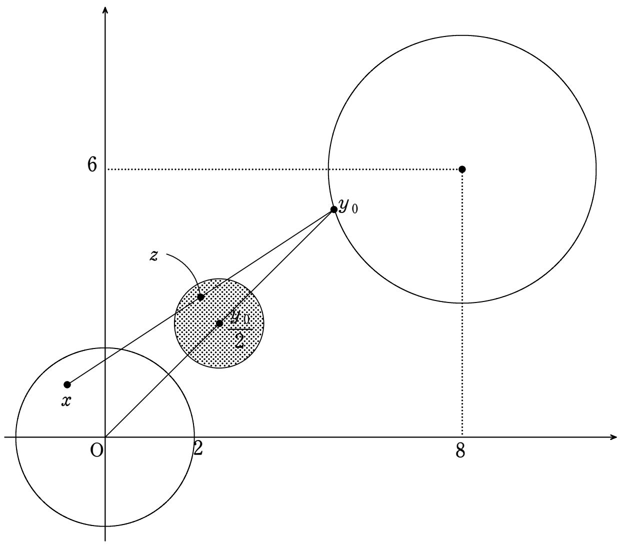
【解 1】

$y=y_0$ と固定する。

$z=\dfrac{x+y_0}{2}$ より，$x=2z-y_0$ であり，複素数 x が $|x| \leqq 2$ を満たしながら動くとき，z は $|2z-y_0| \leqq 2$，すなわち

$$\left|z-\frac{y_0}{2}\right| \leqq 1$$

を満たしながら動くため，z の存在領域は点 $\dfrac{y_0}{2}$ を中心とする半径 1 の円の周上及び内部である。(この円の周及び内部を C_y と呼ぶ。)



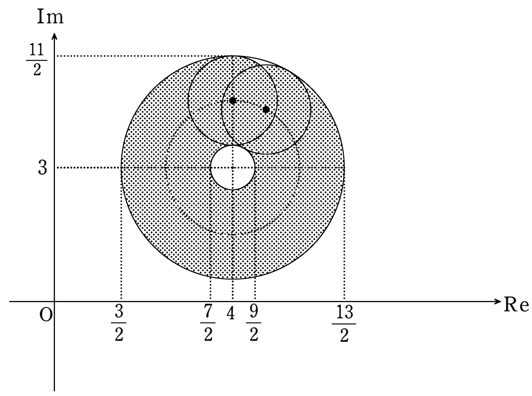
ここで，y の固定を外し，y が $|y-(8+6i)|=3$ を満たしながら動くとする。

このとき，

$$\left|\frac{y}{2}-(4+3i)\right|=\frac{3}{2}$$

であるため，C_y の中心は点 $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円上を動く。

したがって，題意の z の存在領域は以下の円環部分 (境界線を含む)
(外側の円の半径は $\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$，内側の円の半径は $\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$)



また，この z の存在領域の面積は $\pi\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=6\pi$ …【答】

【戦略 2】

先に x を固定し，y を動かすという態度でいくという路線で考えてみます。

$x=x_0$ などと固定すると，$z=\dfrac{x_0+y}{2}$ より，$y=2z-x_0$ ですから，

$|2z-x_0-(8+6i)|=3$ となり，

$$\left|z-\frac{x_0+(8+6i)}{2}\right|=\frac{3}{2}$$

と，z は点 x_0 と点 $8+6i$ を結ぶ線分の中点（これを w_0 とおく）を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円上を動くことになります。

ここで，x の固定を外し，$|x|\leqq 2$ で動かすことを考えると，
$x=2w-(8+6i)$ でしたから，先ほどの円の中心である w は，

$$|w-(4+3i)|\leqq 1$$

を満たしている必要が出てきます。

一方，$|z-w|=\dfrac{3}{2}\iff|w-z|=\dfrac{3}{2}$ ということになります。

つまり，w は $\begin{cases}\text{点 } 4+3i \text{ を中心とする半径 } 1 \text{ の円の周上及び内部}\\ \text{点 } z \text{ を中心とする半径 } \dfrac{3}{2} \text{ の円の周上}\end{cases}$

に存在していなければならないため，下手くそな z ではいけません。

片一方は中身の詰まった円板，もう一方は円周が共有点をもつための条件を考えることになりますが，結局は 2 円が共有点をもつための条件を考えればよく，

$$|(\text{半径の差})|\leqq(\text{中心間距離})\leqq(\text{半径の和})$$

と捌いていけばよいでしょう。

【解 2】

$w=\dfrac{x+(8+6i)}{2}$ とおき，x を $x=x_0$ と固定する。

このとき w も $w_0=\dfrac{x_0+(8+6i)}{2}$ と固定される。

$z=\dfrac{x_0+y}{2}$ より，$y=2z-x_0$

y は $|y-(8+6i)|=3$ を満たしながら動いているため，

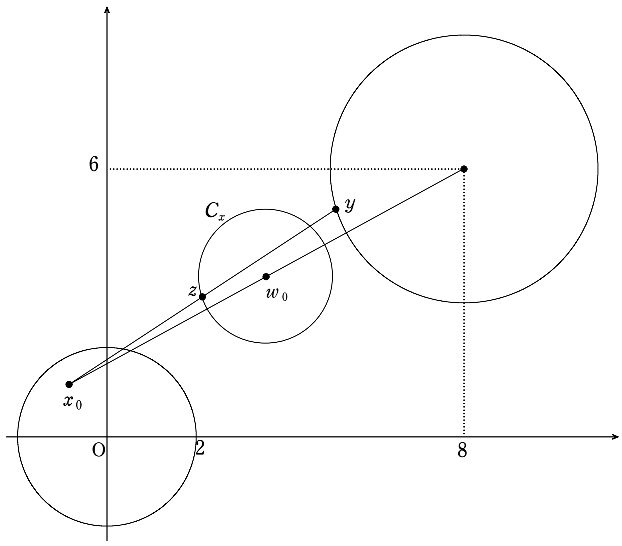
$$|2z-x_0-(8+6i)|=3$$

すなわち

$$|z-w_0|=\frac{3}{2}$$

を満たしている。

ゆえに，$x=x_0$ と固定したときの z の存在領域は以下の円 C_x



ここで，x の固定を外して $|x|\leqq 2$ を満たすように動かす。

$x=2w-(8+6i)$ より，

$$|2w-(8+6i)|\leqq 2$$

すなわち，$|w-(4+3i)|\leqq 1\cdots$①

また，$|z-w|=\dfrac{3}{2}$ より，$|w-z|=\dfrac{3}{2}\cdots$②

①，② を同時に満たす w が存在する，すなわち

w が $\begin{cases}\text{点 } 4+3i \text{ を中心とする半径 } 1 \text{ の円の周上及び内部}\\ \text{点 } z \text{ を中心とする半径 } \dfrac{3}{2} \text{ の円の周上}\end{cases}$

に存在するための z が満たすべき条件は

$$\left|1-\frac{3}{2}\right|\leqq|z-(4+3i)|\leqq 1+\frac{3}{2}$$

すなわち，$\dfrac{1}{2}\leqq|z-(4+3i)|\leqq\dfrac{5}{2}$ である。

（以下，z の存在領域の図示，及び面積は【解 1】参照）

【戦略 3】

実部・虚部を持ち出してもよいでしょう。

【解 3】

$y=y_0$ と固定する。

$z=\dfrac{x+y_0}{2}$ より，$x=2z-y_0$ であり，複素数 x が $|x|\leqq 2$ を満たしながら動くとき，z は $|2z-y_0|\leqq 2$，すなわち

$$\left|z-\frac{y_0}{2}\right|\leqq 1$$

を満たしながら動くため，z の存在領域は点 $\dfrac{y_0}{2}$ を中心とする半径 1 の円の周上及び内部である。(この円の周及び内部を C_y と呼ぶ。)

ここで，y の固定を外し，y を $|y-(8+6i)|=3$ を満たすように動かす。

$z=p+qi$，$y=u+vi$ (p，q，u，v は実数) とすると，u，v は

$$(u-8)^2+(v-6)^2=9 \ \cdots ①$$

を満たす。

一方，$\left|\left(p-\dfrac{u}{2}\right)+\left(q-\dfrac{v}{2}\right)i\right|\leqq 1$ より，$\left(p-\dfrac{u}{2}\right)^2+\left(q-\dfrac{v}{2}\right)^2\leqq 1$

すなわち，$(u-2p)^2+(v-2q)^2\leqq 4 \ \cdots ②$

これら ①，② を同時に満たす実数 u，v が存在するための p，q の条件は

$$|3-2|\leqq\sqrt{(2p-8)^2+(2q-6)^2}\leqq 3+2$$

$$1\leqq(2p-8)^2+(2q-6)^2\leqq 25$$

$$\frac{1}{4}\leqq(p-4)^2+(q-3)^2\leqq\frac{25}{4}$$

ゆえに，z ($=p+qi$) の存在領域は以下のようになる。

(以下，z の存在領域の図示，及び面積は【解 1】参照)

【総括】

片方を固定し，１つずつ動かすという予選決勝法の考え方で捌くという方向性は外したくありません。

x は中身の詰まった円板内を動き，y は円周上を動きます。

そうなってくると，

予選で $|x|\leqq 2$

決勝戦で $|y-(8+6i)|=3$

と捌く方がマシなので，先に y を固定した方がよいでしょう。

（決勝戦で不等式は扱いたくない）

【解 2】【解 3】の考え方は w の存在条件から z が満たすべき関係式を見出していくわけですが，

下手くそな z ($=p+qi$) だと，w ($=u+vi$) が存在できない

という意識がないと何をしていいのかを見失いかねません。