n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_4 を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

＜ '24 京都大 ＞

【戦略 1】

場合の数ではなく，確率ということで，6 面に名前を付けて区別して考えることで，全事象を n^6 通りと楽にすることができます。

6 面に区別があるという条件の下で，題意の塗り方が a_n 通りとすると

$$p_n=\frac{a_n}{n^6}$$

ということになり，(1) は a_4 に集中することになります。

(1) **a_4 については 4 色を準備するわけですが，**

[1] **4 色全てを使うとき**
[2] **ちょうど 3 色を使うとき**

と場合分けすることになります。

辺を共有するどの 2 つの面も異色で塗るということは同色が許されるのは対面同士のみということに気を付けます。

[1] **は 3 組ある対面のうち，$\begin{cases}2\text{ 組が同色}\\1\text{ 組が異色}\end{cases}$ ということになります。**

[2] **は 3 組全てが同色となります。**

(2) **例えば $n=1$ 億 とすると，ほぼほぼ隣り合う面は異色でしょう。**

ですから，直感的には $\lim_{n\to\infty} p_n=1$ ということが予想できます。

a_n は $\begin{cases}\text{ちょうど 6 色を用いる}\\\text{ちょうど 5 色を用いる}\\\text{ちょうど 4 色を用いる}\\\text{ちょうど 3 色を用いる}\end{cases}$ という 4 パターンがあります。

（1 色のみというのはありえませんし，ちょうど 2 色を用いるということもできません。）

$n=1$ 億など，バカでかい数字であるときを想像してみると，直感的には 6 面全て異なる色でしょう。

つまり，n が十分大きいとき，p_n というのは異なる 6 色で塗り分けられる確率と同じであることが直感的に分かるわけです。

そこでちょうど 6 色を用いる方法を b_n 通りとすると $b_n\leqq a_n$ ですから，$\dfrac{b_n}{n^6}\leqq\dfrac{a_n}{n^6}$ なので，$\dfrac{b_n}{n^6}\leqq p_n\leqq 1$ となり，はさみうちの原理で仕留めることを目論みます。

【解 1】

6 面に A，B，C，D，E，F と名前をつけて区別する。
（ただし，(A，B)，(C，D)，(E，F) が対面とする。）

n 色を準備し，辺を共有するどの 2 面も異なる色で塗る塗り方を a_n 通りとすると，$p_n=\dfrac{a_n}{n^6}$

(1) a_4 について

＜ 4 色全てを使うとき＞

対面 (A，B)，(C，D)，(E，F) のうち，2 組を同色，1 組を異色で塗ることになり，

同色で塗る対面の選び方が ${}_3C_2$ 通り
それらをどの色で塗るかが $4\cdot 3$ 通り
異色で塗る対面の塗り方が $2\cdot 1$ 通り

よって，${}_3C_2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=72$【通り】

＜ちょうど 3 色を使うとき＞

対面 (A，B)，(C，D)，(E，F) の 3 組を同色で塗ることになる。

準備した 4 色のうち，どの 3 色を使うかが ${}_4C_3$ 通り
その 3 色でこれら 3 組の対面を塗る方法は $3!$ 通り

よって，${}_4C_3\cdot 3!=24$【通り】

以上から，$a_4=72+24=96\ (=2^5\cdot 3)$

ゆえに，$p_4=\dfrac{a_4}{4^6}=\dfrac{2^5\cdot 3}{2^{12}}=\dfrac{3}{128}$ …【答】

(2) 十分大きな n について考えるので，$n\geqq 6$ として考えてよい。

a_n 通りのうち，ちょうど 6 色を使って塗り分ける方法を b_n 通りとすると，

$$b_n={}_nC_6\cdot 6!\ (={}_nP_6)$$

$b_n\leqq a_n$ より，$\dfrac{b_n}{n^6}\leqq\dfrac{a_n}{n^6}$ なので，$\dfrac{b_n}{n^6}\leqq p_n\leqq 1$

$$\begin{aligned}(\text{最左辺})&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^6}\\&=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n}\cdot\frac{n-5}{n}\\&=1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{n}\right)\\&\longrightarrow 1\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} p_n=1$ …【答】

【戦略 2】(2) において a_n を直接出す路線

【戦略 1】でも述べたように，a_n は

$$\begin{cases}\text{ちょうど 6 色を用いる}\\ \text{ちょうど 5 色を用いる}\\ \text{ちょうど 4 色を用いる}\\ \text{ちょうど 3 色を用いる}\end{cases}$$

という 4 パターンがあります。

これらを直接全て考えるという方法でもできなくはありません。

【解 2】(2) について

[1]　ちょうど 6 色で塗り分ける方法

どの色を用いるかが ${}_n\mathrm{C}_6$ 通り
その 6 色をどのように塗り分けるかが 6! 通り

よって ${}_n\mathrm{C}_6\cdot 6!=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$【通り】

[2]　ちょうど 5 色で塗り分ける方法

3 組の対辺 (A，B)，(C，D)，(E，F) のうち
1 組を同色，2 組を異色
で塗ることになる。

同色で塗る 1 組の選び方は ${}_3\mathrm{C}_1=3$【通り】
どの色で塗るかは n 通り

残る 4 面は 4 色で塗るため，$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$【通り】

よって，$3\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$【通り】

[3]　ちょうど 4 色で塗る方法

3 組の対辺 (A，B)，(C，D)，(E，F) のうち
2 組を同色，1 組を異色
で塗ることになる。

同色で塗る対面の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$【通り】
それらをどの色で塗るかが $n(n-1)$【通り】

異色で塗る対面の塗り方が $(n-2)(n-3)$【通り】

よって，$3\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)$【通り】

[4]　ちょうど 3 色で塗る方法

3 組の対辺 (A，B)，(C，D)，(E，F) を同色で塗ることになる。

よって，$n(n-1)(n-2)$【通り】

[1]，[2]，[3]，[4] より

$$\begin{aligned}a_n&=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\\&\quad+3\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+3\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)\\&\quad+n(n-1)(n-2)\\&=n(n-1)(n-2)\{(n-3)(n-4)(n-5)+3(n-3)(n-4)+3(n-3)+1\}\\&=n(n-1)(n-2)\{(n-3)\{(n-4)(n-5)+3(n-4)+3\}+1\}\\&=n(n-1)(n-2)\{(n-3)(n^2-6n+11)+1\}\\&=n(n-1)(n-2)(n^3-9n^2+29n-32)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}p_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^6}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)(n^3-9n^2+29n-32)}{n^6}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n^3-9n^2+29n-32}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{n}+\frac{29}{n^2}-\frac{32}{n^3}\right)\right\}\\&=1\ \cdots\text{【答】}\end{aligned}$$

【総括】

立方体の塗り分けに関する場合の数の問題だと，回転による一致や裏返しによる一致など，多くの人が苦い思いをした経験があると思います。

それに引きずられて下手なことを考えてクシャクシャになってしまいかねません。

場合の数ではなく，確率ということで，各面に区別をつけて考えることで，回転による一致や裏返しによる一致などを考えることが不要になります。

また，戦略 1 で述べたように，$\lim_{n\to\infty}p_n=1$ となることや，n が十分大きいときには，ほぼ確実に 6 色が使われることを直感的に予想できたかどうかという点が大きな山場でしょう。(これらは答案からは見えてこない部分です。)