次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ。

(2) (1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。
必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい。

＜ '24 東京大 ＞

【戦略】

まずは絶対値を外したいでしょう。

幸い，$0\leqq x\leqq 1$ という条件から，$\displaystyle\int_0^x \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt$ と分割できるため，$\displaystyle\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$ と絶対値が外せます。

この後の微分のことを考え，

$$x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt-\int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,dt+x\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

と積分変数 t 以外の文字 x を外に摘まみだし，積の微分法であることに注意して $f'(x)$ を計算すると

$$f'(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

とシンプルになります。

(1) $\displaystyle f'(\tan\varphi)=\int_0^{\tan\varphi} \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_1^{\tan\varphi} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ **ですからこの後の一手は当然 $t=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ という置換です。**

これにより，$f'(\tan\varphi)=2\varphi-\dfrac{\pi}{4}$ と得られ，$f'(\tan\alpha)=0$ を満たすような α は $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ と分かります。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{8}$ **を計算するわけですが，当然半角公式**

$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

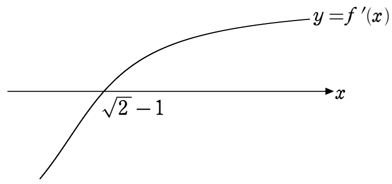
を用いて，$\tan^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\cdots\cdots=(\sqrt{2}-1)^2$

と計算するのみです。

$0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ **なので，$\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ を考えれば $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ となります。**

(3) $f'(x)$ **はあと一回微分するとインテグラルがなくなるので $f''(x)$ を計算することで，$f'(x)$ が単調増加であることが分かります。**

(1)，(2) **から $f'(\sqrt{2}-1)=0$ であることを踏まえると**



というようなグラフを元に

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

という増減表が得られますから最小値が $f(\sqrt{2}-1)$ であることが確定します。

あとは，$f(0)$ と $f(1)$ のどちらが大きいかを調べればよく，素直に $f(1)-f(0)$ と差をとったものを考えればよいでしょう。

【解答】

$$f(x)=\int_0^x \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt$$
$$=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$
$$=x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt-\int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,dt+x\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \cdots ①$$

$$f'(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}+\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \cdots ②$$

(1)　$f'(\tan\varphi)=\displaystyle\int_0^{\tan\varphi} \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_1^{\tan\varphi} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$t=\tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

t	$0 \ \rightarrow \ \tan\varphi$
θ	$0 \ \rightarrow \ \varphi$

t	$1 \ \rightarrow \ \tan\varphi$
θ	$\frac{\pi}{4} \ \rightarrow \ \varphi$

$$f'(\tan\varphi)=\int_0^{\varphi} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\varphi} d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} d\theta \quad \left(\because\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$
$$=\varphi+\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\varphi-\frac{\pi}{4}$$

$f'(\tan\alpha)=0$ となるとき，$2\alpha-\dfrac{\pi}{4}=0$，すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ …【答】

(2)　$\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$$\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=(\sqrt{2}-1)^2$$

$0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ であるから，

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1 \quad \cdots 【答】$$

(3)　② の両辺を x で微分すると，

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}>0$$

よって，$f'(x)$ は単調増加である。

(1)，(2) より，$f'\left(\tan\dfrac{\pi}{8}\right)=0$，すなわち $f'(\sqrt{2}-1)=0$ なので

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

① より，$f(0)=-\displaystyle\int_1^0 \frac{t}{1+t^2}\,dt$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\log 2$$

$$f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

$$f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4}-\log 2$$
$$>\frac{3}{4}-0.7$$
$$=0.05$$
$$>0$$

よって，$f(0)<f(1)$

また，① において $x=\tan\alpha\left(=\tan\dfrac{\pi}{8}\right)$ とおくと

$$f(\tan\alpha)=\tan\alpha\int_0^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^{\tan\alpha} \frac{t}{1+t^2}\,dt$$
$$-\int_1^{\tan\alpha} \frac{t}{1+t^2}dt+\tan\alpha\int_1^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$=\tan\alpha\int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\tan\alpha} \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_1^{\tan\alpha} \frac{2t}{1+t^2}\,dt+\tan\alpha\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\tan\alpha\int_0^{\alpha} d\theta-\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^{\tan\alpha}-\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_1^{\tan\alpha}+\tan\alpha\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} d\theta$$

$$=\alpha\tan\alpha-\frac{1}{2}\log(1+\tan^2\alpha)-\frac{1}{2}\log(1+\tan^2\alpha)+\frac{1}{2}\log 2$$
$$+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\alpha$$

$$=\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\alpha-\log(1+\tan^2\alpha)+\frac{1}{2}\log 2$$

今，$\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ であり，$2\alpha-\dfrac{\pi}{4}=0$ であるため，

$$
\begin{aligned}
f\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)&=-\log\{1+(\sqrt{2}-1)^2\}+\frac{1}{2}\log 2\\
&=\frac{1}{2}\log 2-\log(4-2\sqrt{2})\\
&=\frac{1}{2}\log 2-\log 2(2-\sqrt{2})\\
&=\frac{1}{2}\log 2-\{\log 2+\log(2-\sqrt{2})\}\\
&=-\frac{1}{2}\log 2-\log(2-\sqrt{2})\\
&=-\log\sqrt{2}-\log(2-\sqrt{2})\\
&=-\log(2\sqrt{2}-2)\\
&=-\log 2(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}
$$

以上から，$\begin{cases}\text{最大値は}\,f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2\\ \text{最小値は}\,f(\sqrt{2}-1)=-\log 2(\sqrt{2}-1)\end{cases}$ …【答】

【総括】

・絶対値付きの定積分の処理

・$\displaystyle\int_{\bullet}^{\blacklozenge}\frac{1}{a^2+t^2}\,dt$ の処理（$t=a\tan\theta$ とおく置換積分）

・微積分の基本定理（ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ ）

など，重要な内容が凝縮されている良問です。

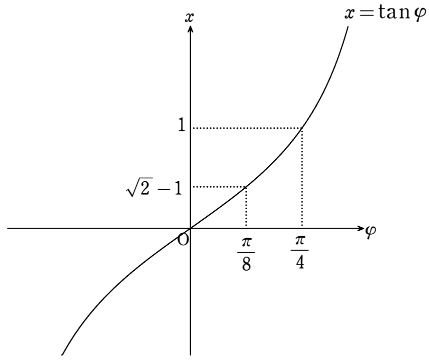
文字と文字の対応関係が目まぐるしいですが，α というのは結局のところ $\dfrac{\pi}{8}$ という特別な値だということを見失うことがないようにしましょう。

内容は標準的な問題ではありますが，計算量があり，スジが悪いと計算もクシャクシャになりやすいため，キッチリと差がつくレベルと言えると思います。

なお，(3) では

$$f'(x)\gtreqless 0 \iff f'(\tan\varphi)\gtreqless 0 \iff 2\varphi-\frac{\pi}{4}\gtreqless 0 \iff \varphi\gtreqless\frac{\pi}{8}$$

ということと，



というグラフを考えると，$0\leqq x\leqq 1$ において

$$
\begin{cases}
f'(x)>0 \iff \varphi>\dfrac{\pi}{8} \iff \sqrt{2}-1<x\leqq 1\\
f'(x)=0 \iff \varphi=\dfrac{\pi}{8} \iff x=\sqrt{2}-1\\
f'(x)<0 \iff \varphi<\dfrac{\pi}{8} \iff 0\leqq x<\sqrt{2}-1
\end{cases}
$$

となるため，このようにして増減表

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

を得てもよいでしょう。