2024 年度 東京大学 理系 第1問

座標空間内の点 A$(0,\ -1,\ 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i)　P は原点 O と異なる。

(ii)　$\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii)　$\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

＜ '24 東京大 ＞

【戦略】

空間座標において角度を扱うにあたってはベクトルの内積を用いる方針が最有力路線でしょう。

題意の点 P を $(X,\ Y,\ 0)$ などとおき，後の内積計算に必要な

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AO}},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

を成分表示しておきます。

今回の角度は符号付き角度ではないため，$\angle \mathrm{AOP}$ や $\angle \mathrm{OAP}$ は 0 から π までの角度として捉えればよく，そうなると $\cos$ は単調減少なので，

$$\text{(ii) は } \cos\angle \mathrm{AOP} \leqq \cos\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{(iii) は } \cos\angle \mathrm{OAP} \geqq \cos\frac{\pi}{6}$$

と捌いていくことになります。

途中で根号を含む不等式の処理が要求されますが，

$B \geqq 0$ の下で

$$A \geqq \sqrt{B} \iff A \geqq 0 \text{ かつ } A^2 \geqq B$$

という同値性に気を付けながら捌いていきましょう。

【解答】

P$(X,\ Y,\ 0)$ とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

条件 (i) より，$(X,\ Y) \neq (0,\ 0)$ …①

条件 (ii) より，$\cos\angle \mathrm{AOP} \leqq \cos\dfrac{2}{3}\pi$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} \leqq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-Y}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}} \leqq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{Y}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}} \geqq \frac{1}{2}$$

$$Y \geqq \sqrt{\frac{X^2+Y^2}{2}}$$

$$Y \geqq 0 \text{ かつ } Y^2 \geqq \frac{X^2+Y^2}{2}$$

$$Y \geqq 0 \text{ かつ } Y^2 - X^2 \geqq 0$$

$$Y \geqq 0 \text{ かつ } (Y+X)(Y-X) \geqq 0$$

$$Y \geqq 0 \text{ かつ「} \begin{cases} Y \geqq -X \\ Y \geqq X \end{cases} \text{ または } \begin{cases} Y \leqq -X \\ Y \leqq X \end{cases} \text{」} \cdots ②$$

条件 (iii) より，$\cos\angle \mathrm{OAP} \geqq \cos\dfrac{\pi}{6}$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{Y+2}{\sqrt{2}\ \sqrt{X^2+(Y+1)^2+(-1)^2}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

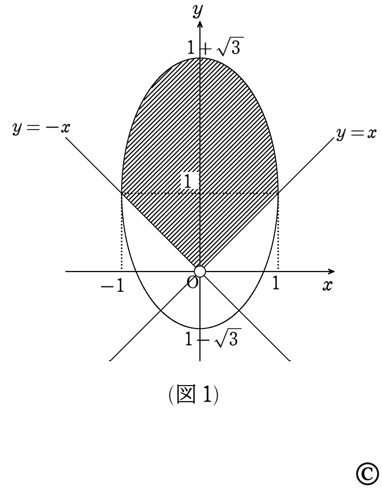
$$Y+2 \geqq \sqrt{\frac{3(X^2+Y^2+2Y+2)}{2}}$$

$$Y \geqq -2 \text{ かつ } (Y+2)^2 \geqq \frac{3}{2}(X^2+Y^2+2Y+2)$$

$$Y \geqq -2 \text{ かつ } 3X^2+(Y-1)^2-3 \leqq 0$$

$$Y \geqq -2 \text{ かつ } X^2+\frac{(Y-1)^2}{3} \leqq 1 \ \cdots ③$$

①，②，③ より，P$(X,\ Y,\ 0)$ の存在領域は以下の (図1) の斜線部分である。(境界線は含み，○ は除く。)



(図1)

【総括】

方針面で困ることがあっては合格が遠のいてしまいます。

座標において角度を扱う手段としては

①：ベクトルの内積の利用

②：傾きと $\tan$ の利用

③：複素数平面の利用

などがありますが，空間座標においては ① のベクトルの内積利用が最有力候補となります。

途中の式変形においては根号を含む同値変形が現れるため気を遣いますが，東大受験生であれば難なく捌ききりたいレベルです。