サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$$

で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

＜ '13 一橋大 ＞

【戦略】

s_n は a_1，a_2，…，a_n を左から並べてできる n 桁の自然数です。

(1)　**s_n が 4 で割り切れる ⇔ s_n の下二桁が 4 で割り切れる**

ということですから，実質的には a_{n-1}，a_n がどうなっていればよいのかだけを見ればよいことになります。

注意したいのはこの議論は $n\geqq 2$ のときにできることであり，$n=1$ のときは別の脳みそで考えないといけません。

(2)　**s_n が a_1，a_2，…，a_n を左から並べてできる n 桁の自然数という意識があれば**

$$s_{n+1}=10s_n+a_{n+1}$$

という関係式も立てられるでしょう。

$10s_n$ を 6 で割った余りに応じて，適切な a_{n+1} が 1 つ存在するので

$$\frac{1}{6}$$

と即求まります。

(1) 同様，$n=1$ のときは別に考えましょう。

(3)　**s_n が 7 の倍数のときは，a_{n+1} が何であっても s_{n+1} は 7 の倍数となることができません。**

したがって，s_{n+1} が 7 の倍数となるためには

s_n が 7 の倍数でない　かつ　$10s_n$ を 7 で割った余りに応じた目が出る

ということであり，求める確率を p_n とすると

$$p_{n+1}=(1-p_n)\times\frac{1}{6}\quad(p_1=0)$$

という漸化式を得て，後は消化試合です。

【解答】

(1)　s_n は $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ という n 桁の自然数である。

$n\geqq 2$ のとき

s_n が 4 で割り切れる ⇔ s_n の下二桁が 4 で割り切れる
⇔ $10a_{n-1}+a_n$ が 4 で割り切れる

より，$(a_{n-1},\ a_n)$ のとり得る値の組は

$(a_{n-1},\ a_n)$
$=(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (5,\ 2),\ (5,\ 6),\ (6,\ 4)$

の 9 通りで，題意の確率は $\dfrac{9}{6^2}=\dfrac{1}{4}$

$n=1$ のとき，$s_1=a_1$ が 4 で割り切れる確率は 1 回サイコロを投げて4 の目が出る確率であり，$\dfrac{1}{6}$

以上から，求める確率は $\begin{cases} n=1 \text{ のとき } \dfrac{1}{6} \\ n\geqq 2 \text{ のとき } \dfrac{1}{4} \end{cases}$ …【答】

(2)　$s_{n+1}=10s_n+a_{n+1}$

$a_1\sim a_n$ がどのような目であっても，$10s_n$ を 6 で割った余りが 1 つ定まり，それに応じて s_{n+1} が 6 の倍数となるような a_{n+1} の目が 1 つ対応する。

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき，題意の確率は $\dfrac{1}{6}$

$n=1$ のとき，$s_1=a_1$ が 6 で割り切れる確率は 1 回サイコロを投げて6 の目が出る確率であり，$\dfrac{1}{6}$

以上から，求める確率は $\dfrac{1}{6}$ …【答】

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を p_n とおく。

s_n が 7 で割り切れるとき，s_{n+1}（$=10s_n+a_{n+1}$）は a_{n+1} がどのような目であっても 7 で割り切れることはない。

よって，s_{n+1} が 7 で割り切れるためには，s_n が 7 で割り切れないことが必要である。

このとき，$10s_n$ も 7 で割り切れないため，その余りに応じて s_{n+1} が 7 で割り切れるような a_{n+1} が 1 つ存在する。

よって，$p_{n+1}=(1-p_n)\times\dfrac{1}{6}$，すなわち

$$p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$$

また，$p_1=0$ である。

$p_{n+1}-\frac{1}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{7}\right)$ と変形できるため

$$\begin{aligned} p_n-\frac{1}{7}&=\left(p_1-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ &=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって，$p_n=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$ …【答】

【総括】

本問のように 10 だと，s_n は $a_1a_2\cdots a_{n(10)}$ というサイコロの目が各桁の数字となるということが分かりやすいですね。