

a, b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする。座標空間の点 $A(a, 0, b)$ と点 $P(x, y, 0)$ をとる。点 $O(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし、平面 α と直線 AP の交点を Q とする。

- (1) $(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$ が成り立つことを示せ。
 (2) $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ を満たすように点 $P(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

< '23 大阪大 >

【戦略1】

- (1) $\overrightarrow{AP}$ と平面 α が垂直であることから、 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ です。

始点が A に関する等式証明なので、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AO}$ と見ると

$$(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \text{ ということになり、} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$$

ということになります。 A, P, Q は同一直線上にあることから

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos 0 \text{ or } |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos \pi \text{ ということになり}$$

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2 \text{ が成り立ちます。}$$

- (2) A, P については座標が手元にあるため、 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}$ が成分で Get できます。

それにより、 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO}$ は計算できます。

$|\overrightarrow{AP}|^2$ も計算できるため、残るは $|\overrightarrow{AQ}|^2$ の処理ですが、 Q の座標を経由するのは億劫でしょう。

そうなると、垂直を活かして三平方の定理で捌くのが自然でしょうか。

【解1】

- (1) 直線 AP と α が垂直であるため、 α 上のベクトル $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{AP}$ は直交する。

$$\text{ゆえに、} \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \text{ であり、} (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\text{これより、} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} \dots (\star)$$

ここで、 Q は直線 AP 上の点であり、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos \theta \text{ または } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos \pi$$

すなわち、 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \pm |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}|$ であるため、 $(\star)$ より

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$$

が成立する。

$$(2) \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 &= \{-a(x-a) + b^2\}^2 \\ &= (a^2 + b^2 - ax)^2 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{また、} |\overrightarrow{AP}|^2 = (x-a)^2 + y^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AQ}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OQ}|^2 \\ &= (a^2 + b^2) - 1^2 \quad (\because \text{条件 } |\overrightarrow{OQ}| = 1) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、} |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2 = (a^2 + b^2 - 1) \{ (x-a)^2 + y^2 + b^2 \} \dots \textcircled{2}$$

(1) の結果を用いると、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$(a^2 + b^2 - ax)^2 = (a^2 + b^2 - 1) \{ (x-a)^2 + y^2 + b^2 \}$$

$$a^2 x^2 - 2a(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2 - 1)(x^2 - 2ax + y^2 + a^2 + b^2)$$

左辺を右辺に移項すると

$$x^2 \text{ の係数: } (a^2 + b^2 - 1) - a^2 = b^2 - 1$$

$$x \text{ の係数: } -2a(a^2 + b^2 - 1) + 2a(a^2 + b^2) = 2a$$

$$y^2 \text{ の係数: } a^2 + b^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{定数項: } (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 1) - (a^2 + b^2)^2 &= (a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)^2 \\ &= -a^2 - b^2 \end{aligned}$$

ゆえに、

$$(b^2 - 1)x^2 + (a^2 + b^2 - 1)y^2 + 2ax - a^2 - b^2 = 0$$

条件 $a^2 + b^2 > 1$ より、点 $P(x, y, 0)$ の軌跡は xy 平面上の

$$2 \text{ 次曲線 } (b^2 - 1)x^2 + (a^2 + b^2 - 1)y^2 + 2ax - a^2 - b^2 = 0 \dots \text{【答】}$$

【戦略 2】(1) について

幾何的に見ると、題意の主張は当然と思えるのですが、幾何の弱点として、

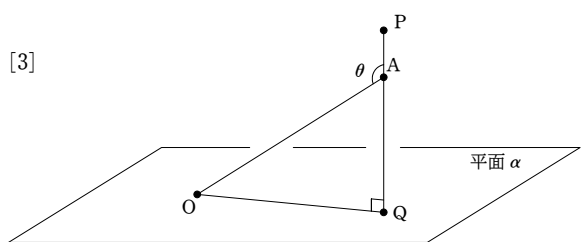
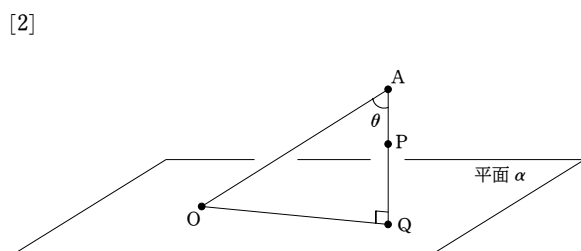
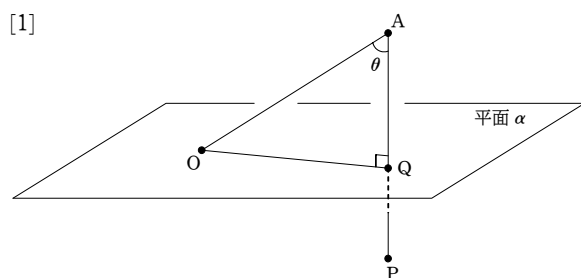
その絵だったらいいけど、もしかしたらこういうシチュエーションもあるかもしれないよ

という突っ込みがありますので、答案としてはそれに耐えうるものとして仕上げる必要があります。

【解 2】(1) について

- (1) $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AO}$ のなす角を θ とする。

直線 AP と O, Q を含む平面 α が直交しており、Q が直線 AP 上にあるので、相対的に見た位置関係は以下の 3 通り考えられる。



$$\begin{aligned} [1], [2] \text{ のケースは, } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} &= |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AO}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \quad (\because |\overrightarrow{AO}| \cos \theta = |\overrightarrow{AQ}|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [3] \text{ のケースは } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} &= |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AO}| \cos \theta \\ &= -|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AO}| \cos(\pi - \theta) \\ &= -|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \end{aligned}$$

いずれにせよ、

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 &= (|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AO}| \cos \theta)^2 \\ &= (|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}|)^2 \\ &= |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

【総括】

幾何的に見ると早いのですが、戦略で述べた幾何特有の弱点には注意しましょう。そう考えると式的に証明する方が無難ですが、始点を A にもっていく点がスムーズにできるかどうかにかかってきます。

(2) はもちろん (1) の関係式を利用して軌跡の方程式を得ることが想定されますが、 $|\overrightarrow{AQ}|^2$ の処理をどうするかで頭を悩ませると思います。

三平方の定理経由で処理しないと計算量的に現実的ではなく、遅かれ早かれ幾何の力を借りる必要が出てくるでしょう。

また、結論をどこでとめるかという話ですが、解答のように

$$2 \text{ 次曲線 } (b^2 - 1)x^2 + (a^2 + b^2 - 1)y^2 + 2ax - a^2 - b^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

と着地すればよいでしょう。

(*) を b の値によって分類すると

$b^2 = 1$ のとき (*) は $a^2 y^2 + 2ax - a^2 - 1 = 0$ で放物線

$$y^2 = -\frac{2}{a}x + 1 + \frac{1}{a^2}$$

$b^2 \neq 1$ のとき、(*) は $(1 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2 - 1)y^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

$$(1 - b^2) \left\{ x^2 - \frac{2a}{1 - b^2}x \right\} - (a^2 + b^2 - 1)y^2 + a^2 + b^2 = 0$$

$$(1 - b^2) \left\{ \left(x - \frac{a}{1 - b^2} \right)^2 - \frac{a^2}{(1 - b^2)^2} \right\} - (a^2 + b^2 - 1)y^2 + a^2 + b^2 = 0$$

$$(1 - b^2) \left(x - \frac{a}{1 - b^2} \right)^2 - (a^2 + b^2 - 1)y^2 = \frac{a^2}{1 - b^2} - a^2 - b^2$$

$$(1 - b^2) \left(x - \frac{a}{1 - b^2} \right)^2 - (a^2 + b^2 - 1)y^2 = \frac{b^2(a^2 + b^2 - 1)}{1 - b^2}$$

$$\frac{(1 - b^2)^2}{b^2(a^2 + b^2 - 1)} \left(x - \frac{a}{1 - b^2} \right)^2 - \frac{1 - b^2}{b^2} y^2 = 1$$

であり、条件 $a^2 + b^2 > 1$ から $\frac{(1 - b^2)^2}{b^2(a^2 + b^2 - 1)} > 0$ であることは確定します。

$b^2 > 1$ のときは、 $\frac{1 - b^2}{b^2} < 0$ であるため

$$\frac{(1 - b^2)^2}{b^2(a^2 + b^2 - 1)} \left(x - \frac{a}{1 - b^2} \right)^2 + \frac{b^2 - 1}{b^2} y^2 = 1$$

と見れば楕円となります。

$0 < b^2 < 1$ のときは、 $\frac{1 - b^2}{b^2} > 0$ であるため、双曲線となります。

阪大がここまで要求していた可能性もあるかもしれませんが、仮にそうだったとしても時間との兼ね合いかつ減点覚悟である程度のところで着地するのもやむなしです。