(1) 方程式 $e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。

(2) $y=x(x^2-3)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点の個数を求めよ。

(3) a を正の実数とし，関数 $f(x)=x(x^2-a)$ を考える。$y=f(x)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。

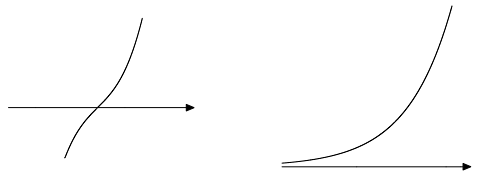
＜ '23 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **手なりに** $g(x)=e^x-\dfrac{2x^3}{x-1}$ **と差を取ったものを考えます。**

$g'(x)=e^x-\dfrac{2x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$ **と得ますが，** $x<0$ **の範囲では** $2x-3<0$ **なので，** $g'(x)>0$ **となり，** $g(x)$ **が単調増加であることになります。**

$g(0)=1$ **と** $x<0$ **の範囲であるゴールの値が正なので，**



という可能性が考えられますが，代入値が負になるものを探すと $g(-1)=\dfrac{1}{e}-1\,(<0)$ **が見つかりますから，後者のケースは否定され負の実数解の個数は 1 個ということになります。**

(2) **方程式で考えると，** $e^x=x(x^2-3)$ **の負の実数解の個数を考えることになります。**

少し先回りしますが，(3) では $e^x=x(x^2-a)$ **という方程式について考えることになります。**

そうなると， $x<0$ **の下で，** $\dfrac{e^x}{x}=x^2-3$**，すなわち**

$$x^2-\frac{e^x}{x}=3$$

と見て， $h(x)=x^2-\dfrac{e^x}{x}$ **と設定し，** $y=h(x)$ **と** $y=3$ **の交点を考えればよいことになります。**

こうすることで，(3) も $y=h(x)$ **と** $y=a$ **の交点を考えればよくなり，結果が使いまわせることになるわけです。**

$h'(x)=2x-\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ **となりますが，通分すると**

$$h'(x)=\frac{2x^3-e^x(x-1)}{x^2}$$

となります。

(1) の方程式の分母を払った形で整理したものが， $2x^3-e^x(x-1)=0$ **なので，(1) の活用が見込めます。**

解答ではそのまま ● $\left(\dfrac{2x^3}{x-1}-e^x\right)$ **と括れるように変形してしまいます。**

(3) $y=h(x)$ **のグラフが得られていれば，ほぼ自明の主張です。**

【解答】

(1) $g(x)=e^x-\dfrac{2x^3}{x-1}$ とおく。

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^x-\frac{6x^2(x-1)-2x^3\cdot 1}{(x-1)^2}\\&=e^x-\frac{2x^2(2x-3)}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

$x<0$ において，$g'(x)>0$ であるため，$g(x)$ は $x<0$ の範囲で単調増加 … ① である。

今，$\begin{cases}g(0)=1\,(>0)\\ g(-1)=\dfrac{1}{e}-1\,(<0)\end{cases}$ … ②

よって $g(x)=0$，すなわち $e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$ を満たす x が $-1<x<0$ の範囲にただ 1 つ存在する。

また，$x\leqq -1$ の範囲では ①，② より $g(x)=0$ を満たす x は存在しない。

以上から，$e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解は 1 個 …【答】

(2) $e^x=x(x^2-3)$ の負の実数解の個数を求める。

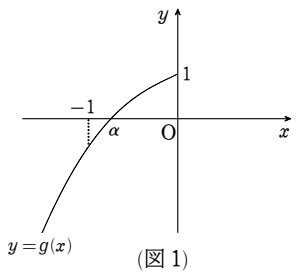
すなわち $x^2-\dfrac{e^x}{x}=3$ を満たす $x\,(<0)$ の個数を求めればよい。

$h(x)=x^2-\dfrac{e^x}{x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}h'(x)&=2x-\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}\\&=2x-\frac{e^x(x-1)}{x^2}\\&=\frac{x-1}{x^2}\left(\frac{2x^3}{x-1}-e^x\right)\\&=\frac{1-x}{x^2}g(x)\end{aligned}$$

$x<0$ の範囲では，$\dfrac{1-x}{x^2}>0$ であるため，$h'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号に一致する。

(1) の実数解を α とおくと，(1) の議論により，$-1<\alpha<0$ である。



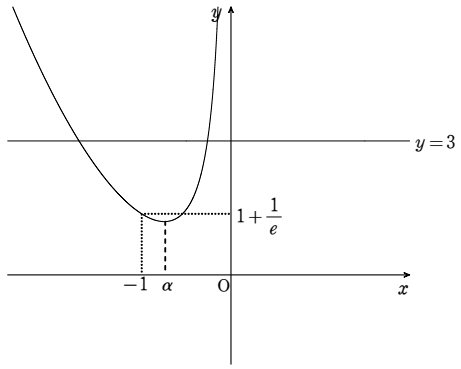
(図 1)

© MathClinic

よって，(図 1) より，$h(x)$ の $x<0$ における増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	α	$\cdots$	(0)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	(∞)	↘	$\alpha^2-\dfrac{e^\alpha}{\alpha}$	↗	(∞)

$h(-1)=1+\dfrac{1}{e}$ (<3) であることに注意すると，$y=h(x)$ のグラフの概形は以下の (図 2) のようになる。



(図 2)

求める $x^2-\dfrac{e^x}{x}=3$ を満たす x (<0) の個数は $x<0$ における $y=h(x)$，$y=3$ のグラフの共有点の個数に等しく，(図 2) より

2 個 …【答】

(3) $e^x=x(x^2-a)$ の負の実数解が 1 個であるときを考える。

すなわち $x^2-\dfrac{e^x}{x}=a$ を満たす x (<0) の個数が 1 個であるような a の値がただ 1 つであることを示せばよい。

これより，$x<0$ における $y=h(x)$，$y=a$ のグラフの共有点がただ 1 つであるような a がただ 1 つであることを示せばよいが，(図 2) より，そのような a の値は $a=h(\alpha)$ というただ 1 つである。

【総括】

問題全体を俯瞰してみると定数分離の形に持ち込むのが第一感ですが，方程式をどの形で見るのが最善なのかを手探りして右往左往する受験生も多いことでしょう。

(1) で考える方程式の負の実数解 α は具体的には求まりませんから，求まらない解 α の扱いに関する習熟度も問われます。

そういった意味で所々やりづらさは感じたかもしれませんが，基本に忠実に捌いていけば多少の路線の違いはあれど結論までは辿り着けます。

微分法の方程式への活用という基本的にはやることが見えやすい話題であり，テーマとしては定番であることから，今年のセットで本問を落とすと，他の問題でのリカバリーが厳しくなります。何とか確保したい問題です。

© MathClinic