$0<b<a$ とする。xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている。

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$ をとる。D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする。xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい。

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)$ を求めよ。

＜ '23 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **2 円が相異なる 2 点で交わるための条件は**

$|2$ 円の半径の差$|<$(中心間距離)$<$(2 円の半径の和)

であるため，今回で言えば $|b-r|<a<b+r$ となります。

あとはこれを r について整理すれば，$a-b<r<a+b$ が得られ，解決です。

(2) **手なりに $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x-a)^2+y^2=b^2 \end{cases}$ から，y^2 を消して x についての方程式を解けばよいでしょう。**

これにより，$h(r)=\dfrac{r^2+a^2-b^2}{2a}$ と得られます。

(3) **図示してみると，円錐と球の一部に分けられます。**

円錐の方は積分不要で，底面積と高さを出せば終了です。

球の一部分の方は積分が必要で，x 軸回転体の公式

$$\int_{h(r)}^{r}\pi y^2dx$$

で仕留めます。

今回は $x^2+y^2=r^2$ という円の境界線を回すため，$y^2=r^2-x^2$ とすれば，$\displaystyle\int_{h(r)}^{r}\{r^2-x^2\}dx$ という単純な積分計算となります。

後はこれらを足せばよく，正しく計算できれば

$$V(r)=\frac{\pi}{3}\{2r^3-(a-b)r^2-2r^2h(r)+(a-b)h(r)^2\}$$

と得られます。

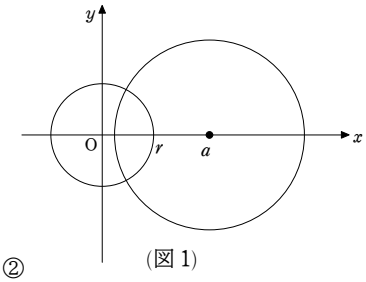
(4) **$V'(r)$ を計算して増減表が得られれば勝ちですから，方針面では困りませんが，$V'(r)$ の計算量がかなりエグイものがあります。**

積の微分法及び合成関数の微分を用いて計算していくわけですが，落ち着いて同類項をまとめていきましょう。

【解答】

(1) 円 C，D が相異なる 2 点で交わる条件は

$$|b-r|<a<b+r$$



(図 1)

左側の不等式から

$-a<b-r<a$，すなわち

$$b-a<r<b+a \quad \cdots ①$$

右側の不等式から $a-b<r$ …②

$0<b<a$ に注意して，①，② を共に満たす r の範囲を求め

$$a-b<r<a+b \quad \cdots【答】$$

(2) 円 C の方程式は $x^2+y^2=r^2$

円 D の方程式は $(x-a)^2+y^2=b^2$

これら 2 式から y^2 を消去すると

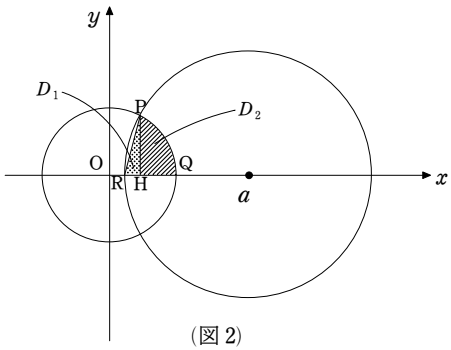
$$(x-a)^2+(r^2-x^2)=b^2$$

これより，$x=\dfrac{r^2+a^2-b^2}{2a}$ を得る。

この x の値が円 C，D の交点の x 座標を与えるため，

$$h(r)=\frac{r^2+a^2-b^2}{2a} \quad \cdots【答】$$

(3)



(図 2)

$\mathrm{H}(h(r),\ 0)$ とし，(図 2) のように領域 D_1，D_2 を定め，D_1，D_2 の x 軸回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。

V_1 は半径 PH の円を底面にもつ高さ RH の円錐の体積であり

$$\begin{aligned} V_1&=\frac{1}{3}\cdot\pi\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{RH} \\ &=\frac{1}{3}\cdot\pi\{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OH}^2\}\cdot\{h(r)-(a-b)\} \\ &=\frac{\pi}{3}\{r^2-h(r)^2\}\{h(r)-(a-b)\} \\ &=\frac{\pi}{3}\{r^2h(r)-(a-b)r^2-h(r)^3+(a-b)h(r)^3\} \end{aligned}$$

© MathClinic

一方

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \int_{h(r)}^{r} \pi y^2\,dx \\
&= \pi\int_{h(r)}^{r} \{r^2 - x^2\}\,dx \\
&= \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{h(r)}^{r} \\
&= \pi\left\{\frac{2}{3}r^3 - r^2h(r) + \frac{1}{3}h(r)^3\right\} \\
&= \frac{\pi}{3}\{2r^3 - 3r^2h(r) + h(r)^3\}
\end{aligned}
$$

$V(r) = V_1 + V_2$ より，

$V(r) = \frac{\pi}{3}\{2r^3 - (a-b)r^2 - 2r^2h(r) + (a-b)h(r)^2\}$ …【答】

(4) $V'(r) = \frac{\pi}{3}\{6r^2 - 2(a-b)r - 4rh(r) - 2r^2h'(r) + 2(a-b)h(r)h'(r)\}$ …(*)

ここで，$h(r) = \frac{1}{2a}r^2 + \frac{a^2-b^2}{2a}$ より，$h'(r) = \frac{r}{a}$ であるため，

$$-4rh(r) = -4r\left(\frac{1}{2a}r^2 + \frac{a^2-b^2}{2a}\right) = -\frac{2}{a}r^3 - \frac{2(a^2-b^2)}{a}r$$

$$-2r^2h'(r) = -2r^2\cdot\frac{r}{a} = -\frac{2}{a}r^3$$

$$
\begin{aligned}
2(a-b)h(r)h'(r) &= 2(a-b)\cdot\frac{r}{a}\left(\frac{1}{2a}r^2 + \frac{a^2-b^2}{2a}\right) \\
&= \frac{2(a-b)}{a}\cdot\frac{1}{2a}r^3 + \frac{2(a-b)}{a}\cdot\frac{a^2-b^2}{2a}r \\
&= \frac{a-b}{a^2}r^3 + \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2}r
\end{aligned}
$$

よって，(*) における｛　｝内は r についての 3 次式であり，

r^3 の係数：$-\frac{2}{a} - \frac{2}{a} + \frac{a-b}{a^2} = \frac{-3a-b}{a^2}$

r^2 の係数：6

r の係数：$-2(a-b) - \frac{2(a^2-b^2)}{a} + \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2}$

$$= \frac{(a-b)(-3a^2-2ab-b^2)}{a^2}$$

定数項：0

したがって，

$$
\begin{aligned}
V'(r) &= \frac{\pi}{3}\left\{-\frac{3a+b}{a^2}r^3 + 6r^2 - \frac{(a-b)(3a^2+2ab+b^2)}{a^2}r\right\} \\
&= -\frac{\pi r}{3a^2}\{(3a+b)r^2 - 6a^2r + (a-b)(3a^2+2ab+b^2)\} \\
&= -\frac{\pi r}{3a^2}\{(3a+b)r - (3a^2+2ab+b^2)\}\{r-(a-b)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} - (a-b) &= \frac{3a^2+2ab+b^2-(a-b)(3a+b)}{3a+b} \\
&= \frac{2b(2a+b)}{3a+b} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b) - \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} &= \frac{(a+b)(3a+b)-(3a^2+2ab+b^2)}{3a+b} \\
&= \frac{2ab}{3a+b} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

よって，$a-b < \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} < a+b$ であるため

$a-b < r < a+b$ の範囲における増減表は以下のようになる。

r	$a-b$	$\cdots$	$\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$	$\cdots$	$a+b$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

以上から，$V(r)$ が最大となる r は $r = \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ …【答】

また，$r(a) = \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ としたとき，

$$
\begin{aligned}
r(a) - a &= \frac{3a^2+2ab+b^2-a(3a+b)}{3a+b} \\
&= \frac{ab+b^2}{3a+b} \\
&= \frac{b+\frac{b^2}{a}}{3+\frac{b}{a}}
\end{aligned}
$$

よって，$\lim_{a\to\infty}\{r(a)-a\} = \frac{b}{3}$ …【答】

【総括】

(3) までは確保したいところなのですが，(3) の結論も試験場だと不安になります。

試しに $V(a-b)$（$r=a-b$ のとき）を計算してみて，$V(a-b)=0$ となれば計算結果は合っている確信がもてるでしょう。

(4) の $V'(r)$ の計算は試験場ではかなり酷です。計算ミスを疑って遡るにしても「ここまでは確実に合っている」というラインが引けてないと結局最初から計算をやり直すことになるため，精神的にツライモノがあると思います。

なお，(3) では結論に $h(r)$ を用いてよいということでしたが，$V(r)$ を $h(r)$ を用いずに表してみると

$$V(r) = -\frac{\pi}{12a^2}\{r-(a-b)\}^2\{(3a+b)r^2 - 2(a+b)^2r - (a-b)(a+b)^2\}$$

という r の 4 次式となります。

© MathClinic