実数係数の 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ は相異なる複素数 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする。ただし，$\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ はそれぞれ α, β と共役な複素数を表す。

(1) $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ を示せ。

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$, $u=\beta+\overline{\beta}$ とおく。p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ。

(3) 座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ。

＜ '23 名古屋大 ＞

【戦略】

(1)
$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})&=(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)-1\\&=(\alpha-1)\overline{(\alpha-1)}-1\\&=|\alpha-1|^2-1\end{aligned}$$

と差を取ったものを考えれば，$|\alpha-1|^2=1$ となる根拠さえあれば解決です。

そして，それは α が $|z-1|=1$ という円上にあるということからただちに言えることです。

(2) **(1) 同様に $\beta+\overline{\beta}=\beta\overline{\beta}$ も言えることになります。**

なので， $\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=t\\ \alpha\overline{\alpha}=t\\ \beta+\overline{\beta}=u\\ \beta\overline{\beta}=u\end{cases}$ **という和と積が手元にあることになります。**

元々の 4 次方程式が α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を解にもつことから

$$x^4-px^3+qx^2-rx+s=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$

が x の恒等式ということになります。

後は両辺の係数を比較すればよいでしょう。

(3) **(2) の結果から，** $\begin{cases}t+u=p\\ tu=s\end{cases}$ **なので，t, u は X についての 2 次方程式**

$$X^2-pX+s=0\ \cdots(*)$$

の解ということになります。

もちろん，この解 t, u には注文が入ります。

まず，$t=\alpha+\overline{\alpha}=2\,\mathrm{Re}(\alpha)$ ですから，α が円 $|z-1|=1$ 上だということを考えると，$0<\mathrm{Re}(\alpha)<2$ ですから，$0<t<4$ でなければなりません。

同様に $0<u<4$ ということにもなります。

そして，$\mathrm{Re}(\alpha)\neq\mathrm{Re}(\beta)$ ということから，$t\neq u$ であることになり，結局 $(*)$ が

$0<X<4$ の範囲に相異なる 2 つの実数解をもつ

ような p, s の条件を捉えればよいことになります。

【解答】

(1) 点 α は点 1 を中心とする半径 1 の円上にあることから

$$|\alpha-1|=1\ \cdots①$$

を満たす。

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})&=(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)-1\\&=(\alpha-1)\overline{(\alpha-1)}-1\\&=|\alpha-1|^2-1\\&=0\ (\because ①)\end{aligned}$$

よって，$\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ が成り立つ。

(2) (1) 同様に $\beta+\overline{\beta}=\beta\overline{\beta}$ が成り立つ。

よって，$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=t\\ \alpha\overline{\alpha}=t\\ \beta+\overline{\beta}=u\\ \beta\overline{\beta}=u\end{cases}\ \cdots②$

α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ が $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ の解であるため

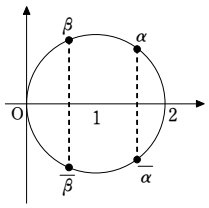
$$x^4-px^3+qx^2-rx+s=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})\ \cdots③$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}\\&=(x^2-tx+t)(x^2-ux+u)\ (\because ②)\\&=x^4-(t+u)x^3+(t+tu+u)x^2-2tux+tu\end{aligned}$$

③ が x についての恒等式であるため

$$\begin{cases}p=t+u\\ q=t+tu+u\\ r=2tu\\ s=tu\end{cases}\ \cdots【答】$$

(3) z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ と表すと



$t=\alpha+\overline{\alpha}=2\,\mathrm{Re}(\alpha)$ より，$0<t<4$

$u=\beta+\overline{\beta}=2\,\mathrm{Re}(\beta)$ より，$0<u<4$

また α, β は複素数平面上の円 $|z-1|=1$ 上の点で α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ が相異なることから $\mathrm{Re}(\alpha)\neq\mathrm{Re}(\beta)$ が成り立つ。

ゆえに，$\dfrac{t}{2}\neq\dfrac{u}{2}$，すなわち $t\neq u$

$\begin{cases}t+u=p\\ tu=s\end{cases}$ より，t, u は X についての 2 次方程式

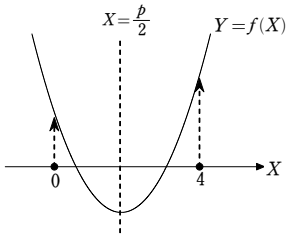
$$X^2-pX+s=0\ \cdots(*)$$

の 2 解となるため，$(*)$ が $0<X<4$ の範囲に相異なる 2 つの実数解をもつときを考えればよい。

© MathClinic

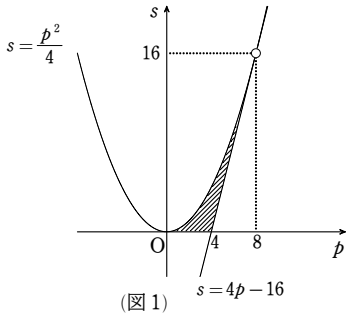
$f(X)=X^2-pX+s=\left(X-\dfrac{p}{2}\right)^2+s-\dfrac{p^2}{4}$ とおくと

$$\begin{cases} 0<\dfrac{p}{2}<4 \ \text{(軸について)} \\ s-\dfrac{p^2}{4}<0 \ \text{(頂点について)} \\ f(0)=s>0 \\ f(4)=16-4p+s>0 \end{cases}$$



すなわち，$\begin{cases} 0<p<8 \\ s<\dfrac{p^2}{4} \\ s>0 \\ s>4p-16 \end{cases}$

ゆえに，求める点 $(p,\ s)$ の存在範囲は以下の (図 1) の斜線部分。
(ただし，境界線は含まない。)



(図 1)

【総括】

複素数平面についての総合的な問題ですが，難しすぎず簡単すぎず計算量もほどほどという標準的内容です。

(3) の存在範囲は要するに $0<t<4$，$0<u<4$，$t \neq u$ を満たしながら t，u が動くときの点 $(t+u,\ tu)$ の存在範囲を求める問題です。

類題経験がモノを言いますが，名大受験生であれば準備してあって然るべきで，合格者にとってのスタンダードと言ってもよいでしょう。

なお，$x^2-tx+t=0$ から $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ が得られ，$x^2-ux+u=0$ から $x=\beta$，$\overline{\beta}$ という解が得られるわけですから，判別式を考えて

$$t^2-4t<0 \iff 0<t<4$$
$$u^2-4u<0 \iff 0<u<4$$

とやるのもアリです。

© MathClinic