　Pを座標平面上の点とし，点Pの座標を $(a,\ b)$ とする。$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y=\cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点Pを通るという条件をみたすものの個数を $N(P)$ とする。
　$N(P)=4$ かつ $0<a<\pi$ をみたすような点Pの存在範囲を座標平面上に図示せよ。

＜ '23 大阪大 ＞

【戦略】

$(t,\ \cos t)$ における $y=\cos x$ の接線

$$y=-\sin t\,(x-t)+\cos t$$

が $P(a,\ b)$ を通るというように翻訳します。

すると，$b=-\sin t\,(a-t)+\cos t$，すなわち

$$b=(t-a)\sin t+\cos t \quad \cdots(*)$$

という関係式を得ます。

この等式を満たす t が $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲で4個存在するような a，b の関係式を求めることになります。

これについては，

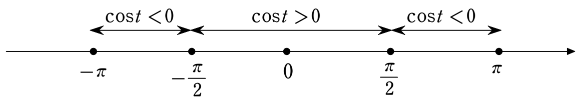
$y=(t-a)\sin t+\cos t$ と $y=b$ の $-\pi \leqq t \leqq \pi$ における
グラフの交点が4つあればよい

と翻訳します。

$f(t)=(t-a)\sin t+\cos t$ に対して，$f'(t)=(t-a)\cos t$ です。

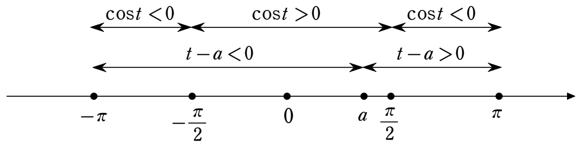
増減表を書くにあたっては，これらの符号を追っていくことになります。

ひとまず，

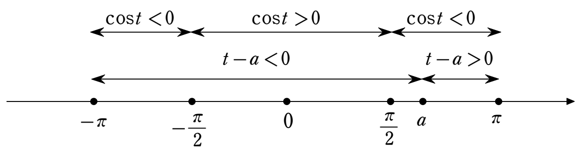


ですから，あとは $t-a$ の符号が切り替わる境目の値である a がどこにあるのかで場合分けをすることになります。

そうなると，



なのか



なのかという，場合分けとなります。(もちろん $a=\frac{\pi}{2}$ のときも調べます)

この山場を超えると，後は手なりに調べたいものが浮かび上がってきます。

【解答】

$y=\cos x$ に対して，$y'=-\sin x$ であり，$(t,\ \cos t)$ における $y=\cos x$ の接線の式は

$$y=-\sin t\,(x-t)+\cos t$$

これが $P(a,\ b)$ を通るとき

$$b=-\sin t\,(a-t)+\cos t$$

すなわち，$b=(t-a)\sin t+\cos t \quad \cdots(*)$

よって，$0<a<\pi$ のとき，$(*)$ を満たす t が $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲で4個となるような a，b の条件を求める。

$f(t)=(t-a)\sin t+\cos t$ とおいたとき，

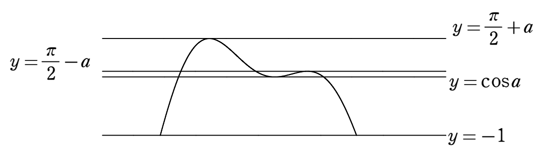
$$\begin{aligned} f'(t)&=1\cdot\sin t+(t-a)\cos t-\sin t \\ &=(t-a)\cos t \end{aligned}$$

[1]　$0<a<\frac{\pi}{2}$ のとき

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$t-a$ の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\cos t$ の符号	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

よって，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\searrow$	-1



$y=f(t)$ と，$y=b$ が相異なる4つの共有点をもてばよく

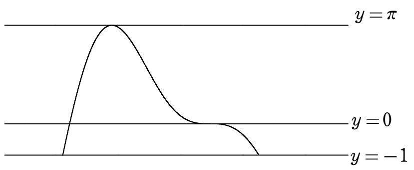
$$\cos a<b<\frac{\pi}{2}-a$$

[2]　$a=\frac{\pi}{2}$ のとき

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$t-a$ の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\cos t$ の符号	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

よって，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
$f(t)$	-1	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



$y=f(t)$ と，$y=b$ は相異なる 4 つの共有点をもたない。

[3]　$\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$ のとき

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$t-a$ の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\cos t$ の符号	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

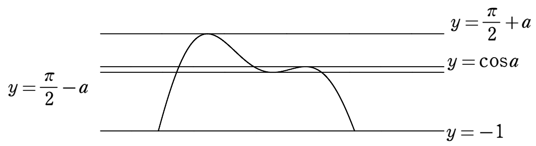
よって，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2}-a$	$\nearrow$	$\cos a$	$\searrow$	-1

今，$\dfrac{\pi}{2}+a>\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi>\cos a$

左山の方が高いことが確定

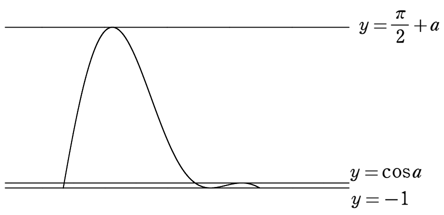
[3−1]　$\dfrac{\pi}{2}-a>-1$，すなわち $\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}+1$ のとき



$y=f(t)$ と，$y=b$ が相異なる 4 つの共有点をもてばよく

$$\frac{\pi}{2}-a<b<\cos a$$

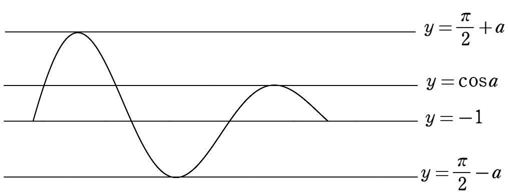
[3−2]　$\dfrac{\pi}{2}-a=-1$，すなわち $a=\dfrac{\pi}{2}+1$ のとき



$y=f(t)$ と，$y=b$ が相異なる 4 つの共有点をもてばよく

$$-1<b<\cos a$$

[3−3]　$\dfrac{\pi}{2}-a<-1$，すなわち $\dfrac{\pi}{2}+1<a<\pi$ のとき



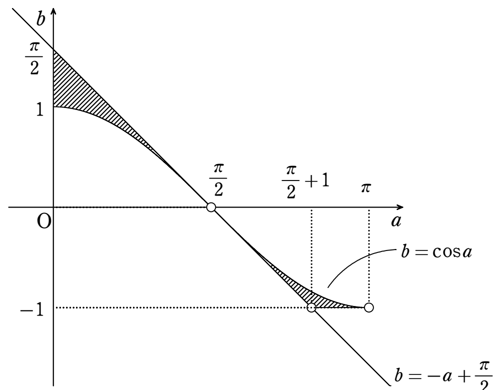
$y=f(t)$ と，$y=b$ が相異なる 4 つの共有点をもてばよく

$$-1\leqq b<\cos a$$

以上まとめると

$$\begin{cases} 0<a<\dfrac{\pi}{2} \text{ かつ } \cos a<b<\dfrac{\pi}{2}-a \\ \dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}+1 \text{ かつ } \dfrac{\pi}{2}-a<b<\cos a \\ a=\dfrac{\pi}{2}+1 \text{ かつ } -1<b<\cos a \\ \dfrac{\pi}{2}+1<a<\pi \text{ かつ } -1\leqq b<\cos a \end{cases}$$

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると，以下の (図 1) の斜線部分。
ただし，境界線は線分 $b=-1\left(\dfrac{\pi}{2}+1<a<\pi\right)$ のみ含む。



(図 1)

【総括】

曲線外の点から何本接線が引けますかというテーマであり，テーマ自体は典型的な話題であるため，方針面で迷う余地があってはいけませんが，処理面で唇を噛んだ受験生が多いでしょう。

ひとまず，$b=(t-a)\sin t+\cos t$ を出した後，下手に

$$(t-a)\sin t+\cos t-b=0$$

と $=0$ を相手にするのは筋があまりよろしくありませんが，こうやった受験生も一定数いたのではないかと思います。(やってできないとまでは言いませんが，少なくともやりたくはありません。)

定数が分離されている形であるため，$\begin{cases} y=b \\ y=(t-a)\sin t+\cos t \end{cases}$ というグラフの交点と捉えるのがよいでしょう。

その後，$f'(t)=(t-a)\cos t$ を出したあたりで手が止まってしまう受験生も多そうです。

ムキになってもう一度微分に走っても，$f''(t)=\cos t-(t-a)\sin t$ となって堂々巡りとなり，キリがありません。

積の形となっていること，$\cos t$ の符号は追っていけることから，$t-a$ の符号が切り替わる境目の値 a がどの程度の大きさなのかに興味をもつことが必要です。