2023年度 大阪大学 理系 第2問

平面上の3点O，A，Bが

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1 \text{ かつ } (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ。

(2) 平面上の点Pが

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|\leqq\frac{1}{3} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ。

＜ '23 大阪大 ＞

【戦略】

(1) **観察してみると，同じような形が随所随所で現れていますから，**
$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{y}$ **とおいてやります。**

すると，$\vec{x}+\vec{y}=3(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ **ですから，**$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})$ **で，**

与えられた条件は

$$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1 \quad \text{かつ} \quad \vec{x}\cdot\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})=\frac{1}{3}$$

とシンプルになり，この条件下で$\vec{x}\cdot\vec{y}$ **を求めればよいことになります。**

2つめの条件は $|\vec{x}|^2+\vec{x}\cdot\vec{y}=1$ **であるため，1つ目の条件と併せると**
$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ **と得られ解決します**

(2) **与えられた条件を引き続き，**$\vec{x}$，$\vec{y}$ **をメインと見て考えると**

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})\right|\leqq\frac{1}{3} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{x}\leqq\frac{1}{3}$$

ということになります。

ひとまず1つ目の条件は円の内部であることが読みとれるでしょう。

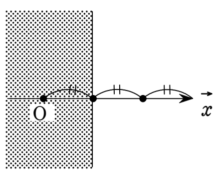
$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})$ **となる点Gに対して，**$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}|\leqq\frac{1}{3}$

すなわち，$|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|\leqq\frac{1}{3}$ **なので，ひとまずPがGを中心とする半径** $\frac{1}{3}$ **の円の周上及び内部にある点であることが分かります。**

2つめの条件ですが，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\vec{x}+v\vec{y}$ **というように**$\vec{x}$，$\vec{y}$ **を用いて表すことを考えます。（これは主役の2本のベクトルで表そうという平面ベクトルにおける基本的な姿勢です。）**

そうすることで，$u\leqq\frac{1}{3}$ **ということを得ます。**

これが何を意味しているかというと，Pが



という範囲に存在しうることを意味します。

あとはこの2つを考慮した図を描けば最大となる場所，最小となる場所が自ずと見えてきます。

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\begin{cases}\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{y}=\vec{a}+2\vec{b}\end{cases}$ とおく。

このとき，$\vec{x}+\vec{y}=3(\vec{a}+\vec{b})$ より，$\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})$

よって，与えられた条件は

$$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1 \cdots ① \text{ かつ } \vec{x}\cdot\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})=\frac{1}{3} \cdots ②$$

② より，$\vec{x}\cdot(\vec{x}+\vec{y})=1$ であり，$|\vec{x}|^2+\vec{x}\cdot\vec{y}=1$

① より，$1+\vec{x}\cdot\vec{y}=1$ であり，$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})&=\vec{x}\cdot\vec{y}\\&=0 \cdots \text{【答】}\end{aligned}$$

(2) 与えられた条件は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})\right|\leqq\frac{1}{3}\cdots③ \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{x}\leqq\frac{1}{3} \cdots④$$

ここで，$\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ なる点Gを考えると，③ は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}|\leqq\frac{1}{3}$$

すなわち，$|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|\leqq\frac{1}{3}$ であり，点Pは点Gを中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の周上及び内部にある点である。$\cdots(*)$

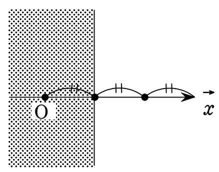
一方，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$，及び(1)の結果である $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ より
$\vec{x}$，$\vec{y}$ は1次独立であるため，平面上の任意の点Pに対して
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\vec{x}+v\vec{y}$ とおけ，このとき ④ は

$$(u\vec{x}+v\vec{y})\cdot\vec{x}\leqq\frac{1}{3}$$

$$u|\vec{x}|^2+v\,\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq\frac{1}{3}$$

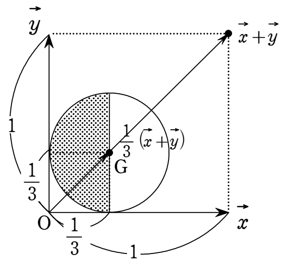
$$u\leqq\frac{1}{3} \cdots(**)$$

これは，点Pが(図1)の打点部に存在しうることを意味する。

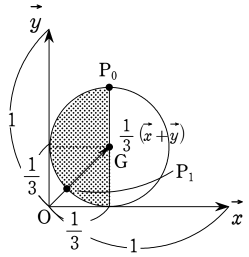


(図1)

よって，(*)，(**) より，点 P の存在範囲は以下の (図 2) の打点部分（ただし，境界線を含む）



(図 2)



(図 3)

$|\overrightarrow{OP}|$ が最大となるのは P が (図 3) の P_0 と一致するとき

このとき，$|\overrightarrow{OP_0}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるのは P が (図 3) の P_1 と一致するとき

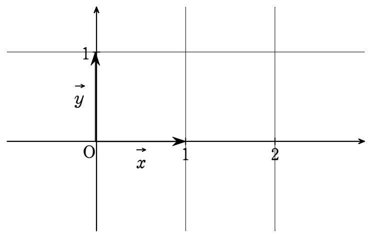
このとき，
$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OP_1}| &= |\overrightarrow{OG}| - \frac{1}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{3}
\end{aligned}
$$

以上から，$|\overrightarrow{OP}|$ の $\left(\begin{array}{l} 最大値は \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ 最小値は \dfrac{\sqrt{2}-1}{3} \end{array}\right.$ …【答】

【総括】

$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\vec{y}$ とおこうという気持ちが持てないと，見えるものが見えなくなります。

$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$， $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ なので



という座標で考えることができるということを利用してもよいでしょう。

例えば，$\overrightarrow{OP}=u\vec{x}+v\vec{y}$ とおくということは，P の座標を P(u, v) とおくということに他なりません。

（自分で解いたときはこの座標のイメージで解いたのですが，座標を導入する説明が面倒だったのでそのままベクトル語でやっちまえというのが解答です。）

座標 (成分) を持ち出すと，$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし，

$\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})=\begin{pmatrix} u-\frac{1}{3} \\ v-\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ で，$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})\right| \leqq \frac{1}{3}$ という条件は

$$\left(u-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v-\frac{1}{3}\right)^2 \leqq \frac{1}{9}$$

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{x}=u$ なので，$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{x} \leqq \frac{1}{3}$ なので，$u \leqq \frac{1}{3}$

ですから，点 P(u, v) の存在範囲は，(図 2) の半円部分であることが分かるでしょう。