

n を 2 以上の自然数とする。

- (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

- (2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (a_n - \log 2)$$

< '23 大阪大 >

【戦略】

- (1) 真ん中の { } 内が

$$\frac{1}{x+1} - \{ 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} \}$$

なので、初項 1、公比 $-x$ の等比数列の和と見れば

$$\frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

と、まとまります。

$(-1)^{2n} = 1$ なので、結局示すべき不等式は

$$\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

と整理できますから、ここまでくると、微分に頼らずとも差を取れば普通に証明できるでしょう。

- (2) (1) の不等式を利用したはさみうちの原理を睨みます。

(1) の不等式を辺々 0 から 1 まで積分することで

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \leq (-1)^n \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \{ 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} \} dx \right\} \leq \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \right) dx$$

という不等式が得られます。

この真ん中の項を整理すると、ターゲットの一部である

$$(-1)^n (\log 2 - a_n)$$

が現れますから、あとは辺々 $-n$ 倍してはさみうちの原理に持ち込めます。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \\ &= \frac{1}{x+1} - \{ 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} \} \cdots \textcircled{1} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} \\ &= \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、示すべき不等式は } \frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{1+x} - \frac{1}{2}x^n &= x^n \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{x^n (1-x)}{2(1+x)} \geq 0 \quad (\because \text{条件 } 0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} - \frac{x^n}{1+x} &= x^n \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{1+x} \right) \\ &= x^n \cdot \frac{x - x^2}{2(1+x)} \\ &= \frac{x^{n+1}(1-x)}{2(1+x)} \geq 0 \quad (\because \text{条件 } 0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

よって、 $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$ であることが示されて、題意の不等式も成り立つことが示された。

- (2) ① より、(1) で示した不等式は

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - \{ 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} \} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

これより

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \leq (-1)^n \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \{ 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} \} dx \right\} \leq \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \right) dx$$

$$(\text{最左辺}) = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$(\text{最右辺}) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\begin{aligned} & (-1)^n \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \{ 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} \} dx \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \left[\log|x+1| \right]_0^1 - \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots - \frac{(-x)^n}{n} \right]_0^1 \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \log 2 - \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{(-1)^n}{n} \right\} \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \log 2 - \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\} \right\} \\ &= (-1)^n (\log 2 - a_n) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、} \frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n (\log 2 - a_n) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\frac{n}{2n+2} \leq (-1)^n n (\log 2 - a_n) \leq \frac{n}{n+1} - \frac{n}{2n+4}$$

$$\frac{n}{2n+4} - \frac{n}{n+1} \leq (-1)^n n (a_n - \log 2) \leq -\frac{n}{2n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+4} - \frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2+\frac{4}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2+\frac{2}{n}} = -\frac{1}{2}$$

はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (a_n - \log 2) = -\frac{1}{2} \dots \text{【答】}$$

【総括】

メルカトル級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$ という有名な級数がありますが、この手の類題経験があると、今回のターゲットに含まれる $\log 2$ というものが $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2$ という積分を通じて得られるということが見えやすくなり、(1)の不等式の活用の仕方も見えやすくなるでしょう。

(1) の { } 内はキレイにまとまるにもかかわらず敢えてこの形で訊いてくれている点はもちろん高校生（受験生）に対する配慮なのですが、この配慮に身構えてしまった人も少なくないと思います。