

2023 年度 東京大学 理系 第6問

O を原点とする座標空間において、不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち、 $z < 1$ を満たす部分を S とする。

以下、座標空間内の2点 A, B が一致するとき、線分 AB は点 A を表すものとし、その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき、点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $OP \leq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき、点 P が動き得る範囲 W の体積を求めよ。

必要ならば、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を用いてよい。

(iii) $ON + NP \leq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

(v) 線分 NP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

< '23 東京大 >