Oを原点とする座標空間において，不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z<1$ を満たす部分を S とする。

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $\mathrm{OP}\leqq\sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動き得る範囲 W の体積を求めよ。

必要ならば，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(iii) $\mathrm{ON}+\mathrm{NP}\leqq\sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

(v) 線分 NP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

＜ '23 東京大 ＞

【戦略】

(1) **条件 (i)，(ii) は 結局は**

O が点光源だと思い，そこから光が放射状に広がったとき，
光が当たる部分の領域の体積

だと思いましょう。(立方体は光を遮断すると思ってください。)

ただ，今回の立方体は上蓋だけは開いているため

$$\begin{cases}\textbf{線分 OP が上面を通過する場合}\\ \textbf{線分 OP が側面，底面上にある場合}\end{cases}$$

に分けて考えて線分 OP の通過領域を捉えることになります。

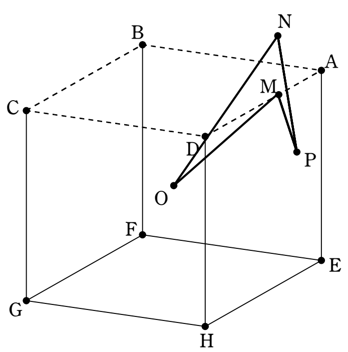
(2) **まず N が O と一致するときは P の存在領域が表す立体は V です。**

つまり，今回考える W の一部分が V ということになります。

そこで，W のうち V に含まれない部分の立体の体積を考えます。

つまり，立方体の側面の外側にはみ出るような P の存在領域を考えます。

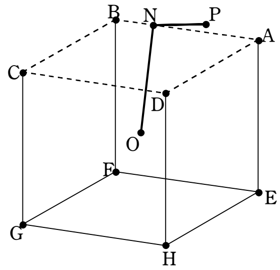
まずは条件 (iii)，(iv)，(v) を満たす N，P が存在したとき，



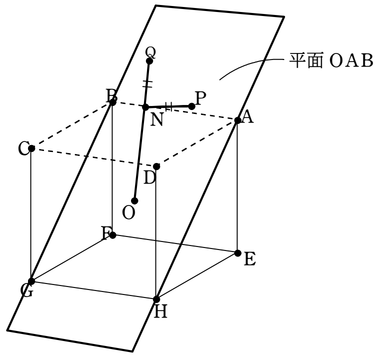
というように折れ線の長さをより小さくしつつ，上蓋の縁 (ヘリ) 上に M をとることができます。

つまり，P の存在範囲を考えるにあたっては N が上蓋の辺上にあるときを考えれば十分だということが言えます。

そこで，まず N が上蓋の線分 AB 上にあるときを考えます。



このとき，

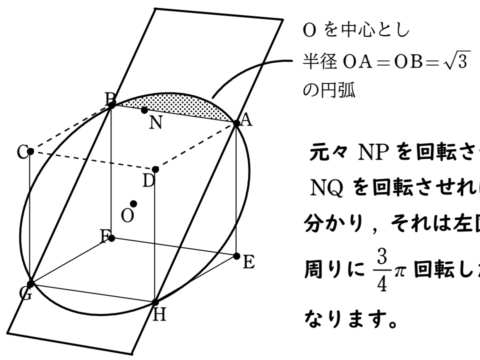


というように NP を回転させて NP＝NQ となる Q を平面 OAB 上に，かつ O，N，Q が一直線上になるようにとることができます。

これにより，

$$\mathrm{ON}+\mathrm{NP}=\mathrm{OQ}\leqq\sqrt{3}$$

を得て，Q の存在範囲が分かります。



元々 NP を回転させて Q を得たため，NQ を回転させれば，P の存在範囲も分かり，それは左図の打点部を AB の周りに $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転した回転体ということになります。

これについては，ひとまず 1 回転させた体積を求め，$\dfrac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi}=\dfrac{3}{8}$ 倍すればよいでしょう。

これにて，N が線分 AB 上にある場合の P の存在範囲の領域の体積が分かりますから，対称性より N が

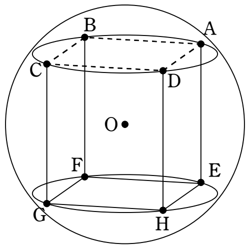
$$\begin{pmatrix}\textbf{線分 BC 上}\\ \textbf{線分 CD 上}\\ \textbf{線分 DA 上}\end{pmatrix}$$

にあるときの体積も分かり，W のうち，V 以外の部分の体積が分かります。

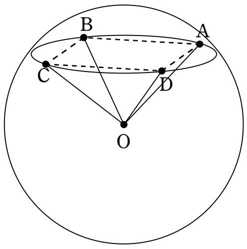
あとは (1) で得た V の体積を加えて解決です。

【解答】

右図のように立方体の頂点を
　A，B，C，D，E，F，G，H
とし，A，B，C，D が平面 $z=1$ 上にあるとする。



(1)　点 P が球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上
　　　かつ
　線分 OP が題意の立方体のうち，
　正方形 ABCD と共有点をもつとき

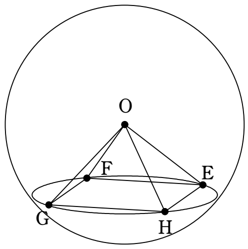


この線分 OP の通過領域の体積は
球 $x^2+y^2+z^2\leqq3$ の体積の $\dfrac{1}{6}$ であり

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

P が正方形 EFGH 上を動くとき

この線分 OP の通過領域の
体積は右図の四角錐の体積
で，$2^2\cdot1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$



同様に点 P が正方形 ADHE，BCGF，CGHD，ABFE 上を動くときの線分 OP の通過領域の体積もそれぞれ $\dfrac{4}{3}$ である。

ゆえに，V の体積は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\cdot5=\dfrac{2\sqrt{3}\pi+20}{3}$ …【答】

(2)　N が O と一致するとき，条件 (iii)，(iv)，(v) は条件 (i)，(ii) に帰着し，P の存在領域が表す立体は V である。

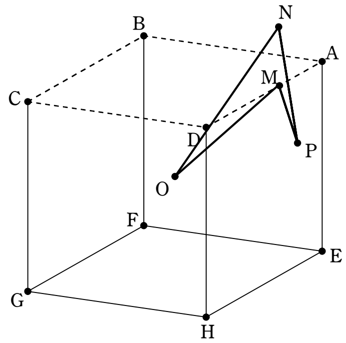
したがって，立体 V は立体 W の一部である。

以下，立体 W のうち立体 V に含まれない部分の体積 W_0 を求める。

今，条件 (iii)，(iv)，(v) を満たす N，P が存在したとき，

$$\mathrm{OM}+\mathrm{MP}\leqq\mathrm{ON}+\mathrm{NP}\ (\leqq\sqrt{3})$$

となるような点 M が正方形 ABCD の周上にとれる。((図 1) 参照)

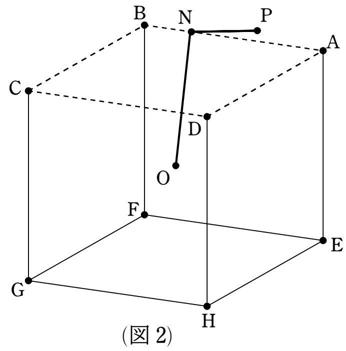


(図 1)

このとき，この M，P は条件 (iii)，(iv)，(v) を満たす。

ゆえに，点 P の存在領域を考えるにあたっては，N が正方形 ABCD の周上にあるときを考えれば十分である。

そこでまず，N が線分 AB 上にあるときを考える。

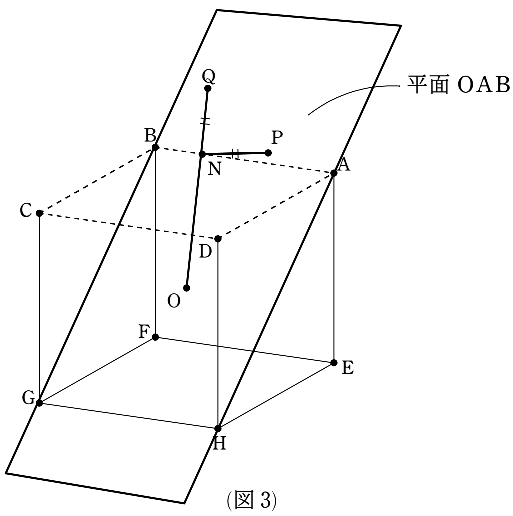


(図 2)

このとき，N を中心として，線分 NP を回転させて平面 OAB 上に乗せることができるため，平面 OAB 上に

NP＝NQ かつ O，N，Q が同一直線上にある

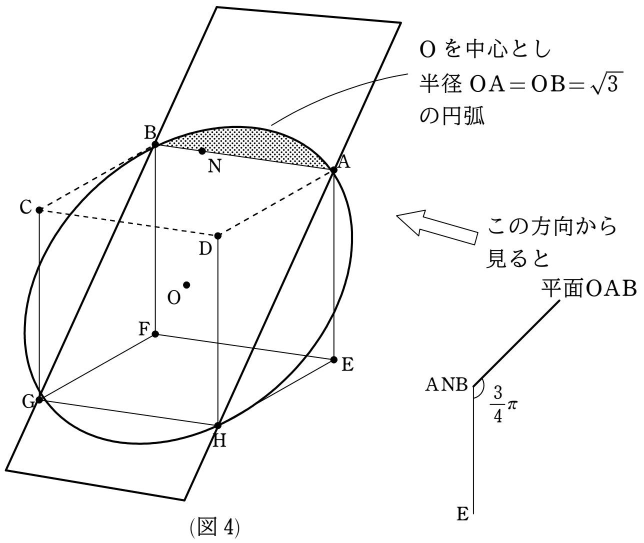
ように直線 AB について O と反対側に点 Q がとれる。((図 3) 参照)



(図 3)

$ON+NP \leqq \sqrt{3}$ であるとき，$ON+NQ \leqq \sqrt{3}$ であり，O，N，Q は同一直線上にあるため，$OQ \leqq \sqrt{3}$

したがって，Q の存在範囲は (図 4) の打点部。

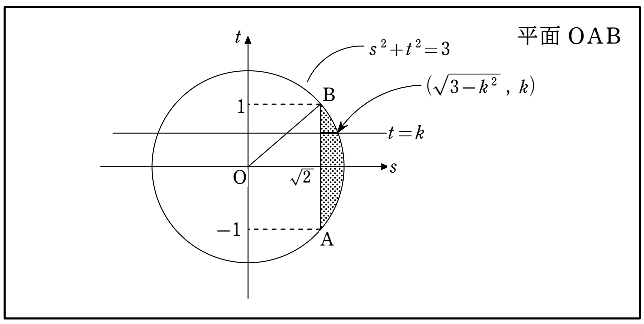


(図 4)

P の存在領域が表す立体は，図の打点部を直線 AB 周りに $\frac{3}{4}\pi$ 回転させた回転体である。

ひとまず，図の打点部を直線 AB 周りに 1 回転させた回転体の体積 U を求める。

これは，平面 OAB 上で下のように st 座標平面を考える。

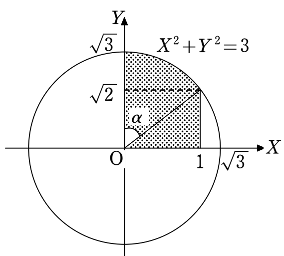


$$U=\int_{-1}^{1}\pi\left\{\sqrt{3-k^2}-\sqrt{2}\right\}^2 dk$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}\left\{(5-k^2)-2\sqrt{2}\ \sqrt{3-k^2}\ \right\}dk$$
$$=2\pi\int_0^1(5-k^2)\,dk-4\sqrt{2}\,\pi\int_0^1\sqrt{3-k^2}\ dk$$

$$\int_0^1(5-k^2)\,dk=\left[5k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^1=\frac{14}{3}$$

$\int_0^1\sqrt{3-k^2}\ dk$ は (図 5) の打点部の面積を表す。

（ただし，α は $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ なる角）



(図 5)

よって，$\int_0^1\sqrt{3-k^2}\ dk=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\alpha+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに，$U=2\pi\cdot\frac{14}{3}-4\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$$=\frac{16}{3}\pi-6\sqrt{2}\,\pi\alpha$$

これより，N が線分 AB 上にあるときの点 P の存在領域の体積 W_1 は

$$W_1=\frac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi}U=\frac{3}{8}U$$

N が線分 BC，CD，DA 上にあるときの点 P の存在領域の体積もそれぞれ W_1 である。

よって，立体 W のうち立体 V に含まれない部分の体積 W_0 は

$$W_0=4W_1=\frac{3}{2}U$$

したがって，求める体積は (1) の体積を加えて

$$\frac{2\sqrt{3}\,\pi+20}{3}+\frac{3}{2}\left(\frac{16}{3}\pi-6\sqrt{2}\,\pi\alpha\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{20}{3}+8\pi-9\sqrt{2}\,\pi\alpha$$
$$=\frac{20}{3}+\left(8+\frac{2\sqrt{3}}{3}-9\sqrt{2}\,\alpha\right)\pi \ \cdots \text{【答】}$$

【総括】

一言で言えば，(1) は長さ $\sqrt{3}$ 以下の棒，(2) は長さ $\sqrt{3}$ 以下のヌンチャクが立方体とぶつからないように動くときの棒やヌンチャクの先端の存在範囲です。

空間図形というものに真正面からぶつかることになり，式だけに頼ろうとすると相当大変な思いをすることになります。

面白い問題ではありますが，時間内に仕上げるのは至難の業で，試験場ではまともに相手にするのは得策ではありません。