関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{6x+1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の接線で，傾きが 1 であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。

(2) 座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x\,,\,f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1\,,\,f(x)+1)$ を考える。x が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け。また S の面積を求めよ。

＜ ’23 東北大 ＞

【戦略】

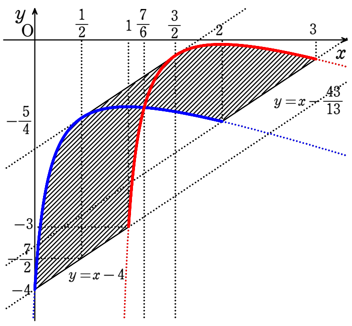
(1) **接点を $(t\,,\,f(t))$ $(t>0)$ と設定し，$f'(t)=1$ となる $t\,(\,>0\,)$ を求めると $t=\dfrac{1}{2}$ を得ますから，$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めれば解決です。**

(2) **線分 PQ について，$\begin{cases}\text{長さ：}\sqrt{2}\\ \text{傾き：}1\end{cases}$ と，長さと傾きを一定に保ちながら動くわけです。**

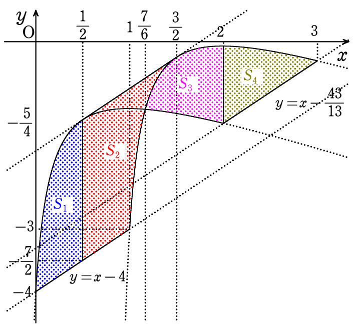
P は $y=f(x)$ 上を動き，Q が動く曲線を $y=g(x)$ とすると，$y=g(x)$ は，$y=f(x)$ を $\begin{cases}x\text{ 軸方向に }1\\ y\text{ 軸方向に }1\end{cases}$ だけ平行移動したものです。

つまり，$y=f(x)$，$y=g(x)$ が言わば「レール」のようなもので，このレールに沿って線分 PQ が傾きと長さを保ったまま動いていきます。

$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフを丁寧に調べ，このレールに沿った動きを目で追うことで，線分 PQ の通過領域 S を図示すると



となります。あとはこの面積を



と分割してそれぞれを出せばオシマイですが，S_1 を平行移動させると S_1+S_2 が平行四辺形の面積になることを利用して，少しだけ労力を減らしましょう。

【解答】

(1) $f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{24}{(6x+1)^2}$

求める接線の接点を $(t\,,\,f(t))$ $(t>0)$ とすると，条件より $f'(t)=1$

$$-\frac{1}{2}+\frac{24}{(6t+1)^2}=1$$
$$\frac{24}{(6t+1)^2}=\frac{3}{2}$$
$$(6t+1)^2=16$$
$$6t+1=\pm 4$$

$t>0$ より，$t=\dfrac{1}{2}$

よって，接点は $\left(\dfrac{1}{2},\,-\dfrac{5}{4}\right)$ であり，求める接線の方程式は

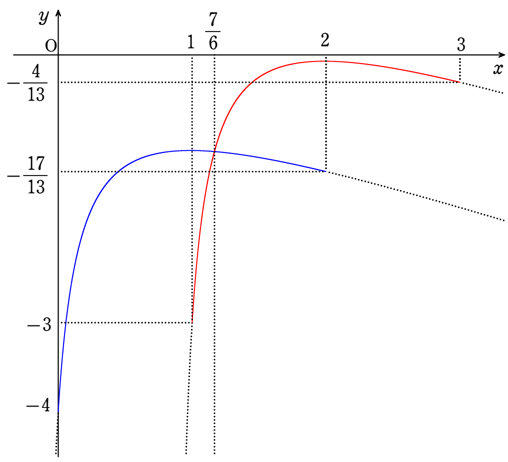
$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{5}{4}$，すなわち $y=x-\dfrac{7}{4}$ …【答】

(2)
$$f'(x)=\frac{-(6x+1)^2+48}{2(6x+1)^2}$$
$$=\frac{-\{(6x+1)+4\sqrt{3}\}\{(6x+1)-4\sqrt{3}\}}{2(6x+1)^2}$$

x	0	…	$\frac{-1+4\sqrt{3}}{6}$	…	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	↗		↘	$-\frac{17}{13}$

$f''(x)=-\dfrac{288}{(6x+1)^3}$ であり，$0\leqq x\leqq 2$ において $f''(x)<0$ だから $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は上に凸である。

ゆえに，$y=f(x)$，及び $y=f(x)$ を $\begin{cases}x\text{ 軸方向に }1\\ y\text{ 軸方向に }1\end{cases}$ だけ平行移動した $y=g(x)$ のグラフは以下の (図 1) のようになる。



(図 1)

線分 PQ について

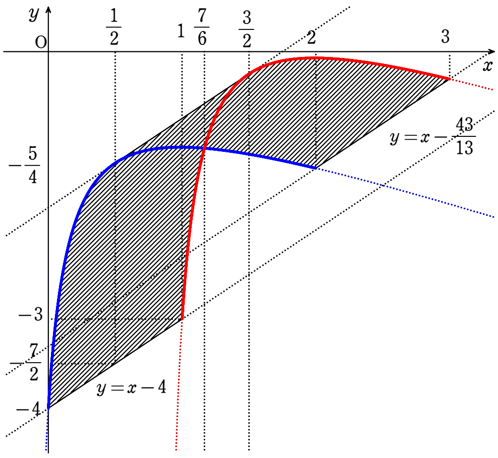
$$\mathrm{PQ}^2=\{(x+1)-x\}^2+\{f(x)+1-f(x)\}^2=2$$

より，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$ （一定）

また，傾きは $\dfrac{\{f(x)+1\}-f(x)}{(x+1)-x}=1$ （一定）

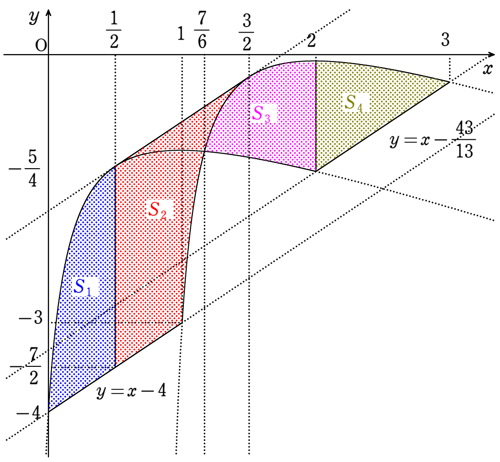
$\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ g(x+1))$ であり，
点 P は $y=f(x)$ 上，点 Q は $y=g(x)$ 上
を長さ，傾きを保ちながら動く。

したがって，線分 PQ の通過領域 S は以下の (図 2) の斜線部



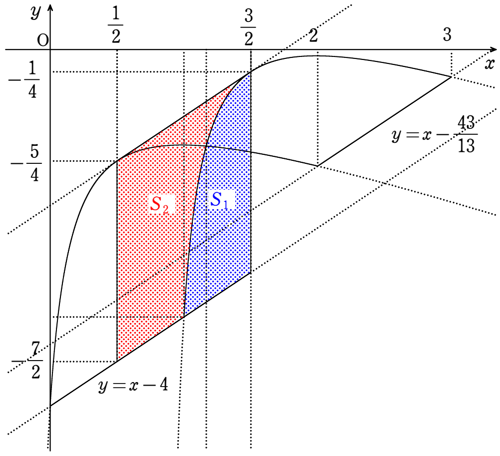
(図 2)

ここで，(図 3) のように面積を定める。



(図 3)

求める面積は $S_1+S_2+S_3+S_4$



(図 4)

(図 4) のように平行移動させると，S_1+S_2 は (図 4) の平行四辺形の面積であり，

$$S_1+S_2=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{-\frac{5}{4}-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=\frac{9}{4}$$

また，

$$f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{4}{6x+1}$$

$$\begin{aligned}g(x)&=-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{4}{6(x-1)+1}+1\\&=-\frac{1}{2}x-\frac{4}{6x-5}+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

より，$g(x)-f(x)=\dfrac{4}{6x+1}-\dfrac{4}{6x+5}+\dfrac{3}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}S_3&=\int_{\frac{7}{6}}^{2}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_{\frac{7}{6}}^{2}\left(\frac{4}{6x+1}-\frac{4}{6x+5}+\frac{3}{2}\right)dx\\&=\left[\frac{2}{3}\log(6x+1)-\frac{2}{3}\log(6x+5)+\frac{3}{2}x\right]_{\frac{7}{6}}^{2}\\&=\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\log\frac{13}{28}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_4&=\int_{2}^{3}\left\{g(x)-\left(x-\frac{43}{13}\right)\right\}dx\\&=\int_{2}^{3}\left\{-\frac{3}{2}x-\frac{4}{6x-5}+\frac{125}{26}\right\}dx\\&=\left[-\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}\log(6x+5)+\frac{125}{26}x\right]_{2}^{3}\\&=\frac{55}{52}+\frac{2}{3}\log\frac{7}{13}\end{aligned}$$

求める面積は

$$\begin{aligned}S_1+S_2+S_3+S_4&=\frac{9}{4}+\left(\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\log\frac{13}{28}\right)+\left(\frac{55}{52}+\frac{2}{3}\log\frac{7}{13}\right)\\&=\frac{237}{52}+\frac{2}{3}\log\frac{1}{4}\\&=\frac{237}{52}-\frac{4}{3}\log 2\quad\cdots【答】\end{aligned}$$

【総括】

線分の通過領域と聞いて身構えますが，今回の通過領域は目で追っていくことができますので，通過領域を求めること自体はそこまで難しくありません。

ただ，図示したり，面積計算に必要な情報をチョコチョコ計算していると時間がかかります。

これ以外にも様々な計算方法があると思いますが，少しでも労力を減らせるように工夫しましょう。