四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする。

$$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=\sqrt{6},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3$$

ただし $\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す。さらに，線分OCと線分ABは垂直であるとする。点Cから3点O，A，Bを含む平面に下ろした垂線をCHとし，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線をOKとする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ。

＜ ’23 東北大 ＞

【戦略】

(1) **$\vec{a}\cdot\vec{b}$ に関しては定義から $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$ であるため，条件から即導出できます。**

$\vec{c}\cdot\vec{a}$ については，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ という条件から得られる $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ すなわち $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ という式，及び $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ という条件から得ることができます。

(2) **Hが平面OAB上の点であることから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ のみで表せます。**

あとは，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp$(平面OAB) から $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$ という2条件を捌いていけばよいでしょう。

α，β という未知数2つに対して条件が2つということで解決です。

(3) **今度は $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を考えたいわけであり，Kが平面ABC上なので**

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c}\ \ (s+t+u=1)$$

と表せます。

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\perp$(平面ABC) から，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$ を捌いていけばよいでしょう。

$s+t+u=1$ という条件も併せて，3条件ありますから，s，t，u という3文字は求めることができます。

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ が得られれば，$\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ も得られますから，$\overrightarrow{\mathrm{HK}}=\square\vec{c}$ となることを身構えておけばよいでしょう。

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3$ …【答】

また，条件 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

よって，$\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ で，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ を得る。

条件 $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ より，$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$ …【答】

(2) Hは平面OAB上の点なので，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

と表せるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c}\end{aligned}$$

ゆえに，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=\alpha|\vec{a}|^2+\beta\,\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=4\alpha+3\beta-3\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=\alpha\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=3\alpha+9\beta-3\end{cases}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp$(平面OAB) であり，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{b}\end{cases}$ なので，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

よって，$\begin{cases}4\alpha+3\beta-3=0\\ 3\alpha+9\beta-3=0\end{cases}$ であり，これら2式から

$$\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=\frac{1}{9}$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}$ …【答】

(3) Kは平面ABC上の点なので，$s+t+u=1$ を満たす実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c}$$

と表せる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=(s-t)\,\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2+u\,\vec{b}\cdot\vec{c}-u\,\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=3(s-t)-4s+9t+3u-3u\ \ (\because\ \text{条件，(1)の結果})\\&=-s+6t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=(s-u)\,\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\,\vec{b}\cdot\vec{c}-t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2\\&=3(s-u)-4s+3t-3t+6u\ \ (\because\ \text{条件，(1)の結果})\\&=-s+3u\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\perp$(平面ABC) であり，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{cases}$ より，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$

よって，$\begin{cases}-s+6t=0\\ -s+3u=0\end{cases}$ であり，$t=\dfrac{s}{6}$，$u=\dfrac{s}{3}$

$s+t+u=1$ に代入し，$s+\dfrac{s}{6}+\dfrac{s}{3}=1$，すなわち $s=\dfrac{2}{3}$ を得る。

このとき，$t=\dfrac{1}{9}$，$u=\dfrac{2}{9}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HK}}&=\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}\\&=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}\right)\\&=\frac{2}{9}\vec{c}\end{aligned}$$

ゆえに，$\vec{c}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ であり，題意は示された。

【戦略 2】(3) について

$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{CAB}$ であることに気がつくと，(2) の α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

と表せるため，少し省エネできます。

【解 2】(3) について

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2&=|\vec{a}-\vec{c}|^2\\&=|\vec{a}|^2-2\,\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2\\&=4-2\cdot3+6\\&=4\end{aligned}\qquad\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{c}|^2\\&=|\vec{b}|^2-2\,\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\&=9-2\cdot3+6\\&=9\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=3$

$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{CAB}$ において $\begin{cases}\mathrm{OA}=\mathrm{CA}=2\\\mathrm{OB}=\mathrm{CB}=3\\\mathrm{AB}\text{ は共通辺}\end{cases}$

よって，3 辺の長さが等しいため，$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{CAB}$

C から対面 OAB に下ろした垂線の足 H に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

としたとき，同様にして

O から対面 CAB に下ろした垂線の足 K に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

が成り立つことになる。

ゆえに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HK}}&=\overrightarrow{\mathrm{CK}}-\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\&=\alpha(\vec{a}-\vec{c})+\beta(\vec{b}-\vec{c})-(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\alpha(\vec{a}-\vec{c})+\beta(\vec{b}-\vec{c})-(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c})\\&=(-\alpha-\beta+1)\vec{c}\end{aligned}$$

よって，$\vec{c}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ であり，題意は示された。

【総括】

$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{c}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ という $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ という基本情報が手元にあれば，登場人物を主役の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表して機械的に捌くことができます。

今回は対面に下ろした垂線についてスポットが当たっていました。

平面 π 上の 2 本のベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ に対して

$\mathrm{PH}\perp$(平面 π) ということを翻訳したければ

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\vec{x}\\\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\vec{y}\end{cases}$$

というように，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ が π 上の何か 2 本のベクトルと垂直であるということが言えればよいことになります。

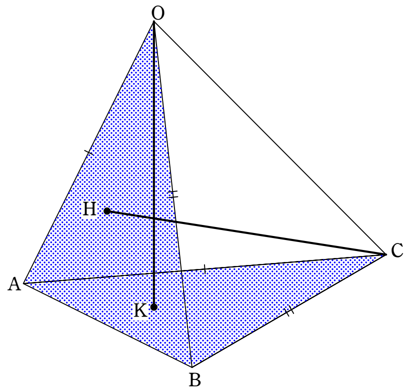
※ 本来は $\mathrm{PH}\perp$ (平面 π) とは，

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ が平面 π 上の任意のベクトルと直交する

ということですが，π 上の任意のベクトルは $k\vec{x}+\ell\vec{y}$ と表せるため

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot(k\vec{x}+\ell\vec{y})=k\,\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{x}+\ell\,\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{y}$ であり，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{x}=0\\\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{y}=0\end{cases}$ が言えていれば十分です。

なお，【解 2】の



という今回の図形がもつ特殊性 (対称性) は気がつけばいいですが，試験場でそこまで冷静になれるかというと中々難しいでしょうし，変なことを考えて時間を失うぐらいであれば，愚直にゴリ押した方がよいでしょう。

なお，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\ (=3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp(\text{平面 OAB})\text{ より，}\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

であることに注目すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{CH}}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}\\&=0\end{aligned}$$

より，H は △OAB の垂心となり，また，上述した対称性から，K は △CAB の垂心であることも言えます。