実数 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して，整式 $f(x)=x^2-ax+1$ を考える。

(1) 整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする。
α を極形式で表せ。ただし，$r^5=1$ を満たす実数 r が $r=1$ のみであることは，認めて使用してよい。

(3) 設問 (2) の虚数 α に対して，$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}$ の値を求めよ。

＜ '23 東北大 ＞

【戦略 1】

(1) $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ とし，$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ とします。
（$f(x)=0$ の判別式 D は $D=a^2-4$ で，今回の a の値に対して$D<0$）

目指すべきは $F(\alpha)=0$，$F(\overline{\alpha})=0$ です。

今，a は具体的な数ではありますが，$2a+1=\sqrt{5}$ ですから両辺 2 乗することで，$4a^2+4a+1=5$，すなわち $a^2+a-1=0$ を得ます。

また，α は $x^2-ax+1=0$ の解であるため，$\alpha^2-a\alpha+1=0$ を得ます。

$F(\alpha)=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$ という高次計算をするにあたっては先ほどの $\alpha^2-a\alpha+1=0$ を

$$\alpha^2=a\alpha-1$$

と見ることにより，次数を下げていきます。

ただ，その際に，a の次数についても下げたいため，$a^2=1-a$ と見て計算していきます。

(2) α の極形式を求めるにあたり，必要なのは $\begin{cases}\text{大きさ } |\alpha| \\ \text{偏角 } \arg\alpha\end{cases}$ です。

α の出所である，$x^2-ax+1=0$ という 2 次方程式に対して解と係数の関係を用いると，$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=a\left(=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ \alpha\overline{\alpha}=1\end{cases}$ という関係を得ます。

ひとまず $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ が α の実部（$\mathrm{Re}(\alpha)$）を表すことから，$\mathrm{Re}(\alpha)>0$ ということが言えます。

α の虚部（$\mathrm{Im}(\alpha)$）が正という条件も考えると，$0<\arg\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ということになります。

$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$ であることより，$|\alpha|=1$ を得るため，

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

と表せます。

この α は $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ を満たしており，$\alpha^5=1$ も満たします。

このことから，α は 1 の 5 乗根ですから，偏角の範囲的に$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ を得て，解決です。

解答ではきちんとド・モアブルの定理を用いて記述していきます。

(3) $\alpha^5=1$ ということから，$\alpha^{2023}=\alpha^3$ ということが分かります。

なので，$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}=\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$ ということになります。

もう少し次数を下げたいのですが，$\alpha^5=1$ ということから

$$\begin{cases}\alpha^3=\dfrac{1}{\alpha^2} \\ \dfrac{1}{\alpha^3}=\alpha^2\end{cases}$$

と見ることで，$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ まで次数を落とすことができます。

元々，$\alpha^2-a\alpha+1=0$ という関係があり，$a=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ ですから

あとは，与式を $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$ と見て

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2&=a^2-2\\&=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-2\end{aligned}$$

と計算すれば解決です。

【解 1】

(1) $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ は，$2a+1=\sqrt{5}$ を満たし，$(2a+1)^2=(\sqrt{5})^2$，
すなわち $a^2+a-1=0$（$\Leftrightarrow$ $a^2=1-a$）を満たす。

$x^2-ax+1=0$ の判別式 D は $D=a^2-4$ であり，$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
に対して $D<0$ であり，実数係数方程式 $f(x)=0$ は虚数解 α，$\overline{\alpha}$ をもつ。

このとき，$\alpha^2-a\alpha+1=0$ であり，

$$\alpha^2=a\alpha-1$$

$$\begin{aligned}\alpha^3&=\alpha\cdot\alpha^2\\&=a\alpha^2-\alpha\\&=a(a\alpha-1)-\alpha\\&=a^2\alpha-a-\alpha\\&=(1-a)\alpha-a-\alpha\\&=-a\alpha-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^4&=\alpha\cdot\alpha^3\\&=-a\alpha^2-a\alpha\\&=-a(a\alpha-1)-a\alpha\\&=-a^2\alpha+a-a\alpha\\&=(a-1)\alpha+a-a\alpha\\&=a-\alpha\end{aligned}$$

$F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ としたとき

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\\&=(a-\alpha)-(a\alpha+a)+(a\alpha-1)+\alpha+1\\&=0\end{aligned}$$

同様に，$\begin{cases}(\overline{\alpha})^2=-a\overline{\alpha}-a\\(\overline{\alpha})^3=-a\overline{\alpha}-a\\(\overline{\alpha})^4=a-\overline{\alpha}\end{cases}$ であるため，$F(\overline{\alpha})=0$

よって，$F(x)$ は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$，すなわち x^2-ax+1 で割り切れる。

(2) 実数係数方程式 $x^2-ax+1=0$ の解が $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ であるため，
解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=a & \cdots①\\ \alpha\overline{\alpha}=1 & \cdots②\end{cases}$$

① より，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\dfrac{a}{2}$ であり，$(\alpha$ の実部$)=\dfrac{a}{2}>0$ …③

② より $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$ なので，$|\alpha|^2=1$ で，$|\alpha|=1$

α の虚部が正という条件も併せると，

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおける。

$F(\alpha)=0$ より，$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ であり，両辺に $\alpha-1$ をかけると

$$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$

すなわち，$\alpha^5-1=0$ を得るため，$\alpha^5=1$

ド・モアブルの定理から，$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=1$

よって，$5\theta=2m\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{2m}{5}\pi$（m は整数）

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$

ゆえに，$\alpha=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ …【答】

(3) $\alpha^5=1$ より，$\alpha^{2023}=(\alpha^5)^{404}\cdot\alpha^3=\alpha^3$

よって，$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}=\alpha^3+\alpha^{-3}$

ここで，$\alpha^5=1$ より $\begin{cases}\alpha^3=\dfrac{1}{\alpha^2}\\ \dfrac{1}{\alpha^3}=\alpha^2\end{cases}$ なので，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\alpha^{-3}&=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\\&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\end{aligned}$$

α は $x^2-ax+1=0$ の解ゆえ，$\alpha^2-a\alpha+1=0$

$\alpha\neq 0$ より，両辺 α で割ると，$\alpha-a+\dfrac{1}{\alpha}=0$，すなわち

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=a$$

よって，

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2&=a^2-2\\&=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-2\\&=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

以上から，$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ …【答】

【戦略 2】(1) について

$f(x)=0$ が共役な 2 つの虚数解をもつので，$x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ と設定し，$F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ に対して $F(\alpha)=0$，$F(\overline{\alpha})=0$ を目指していく路線は【解 1】と同様です。

a については，具体的な数ですが，$a^2+a-1=0$ を満たしています。

一方，α は $\alpha^2-a\alpha+1=0$ を満たしています。

$F(\alpha)=0$ を目指す以上，α が満たすべき等式が欲しいところで，そうなってくると

$$a=\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

と，$a=(\alpha$ の式$)$ として，$a^2+a-1=0$ にぶち込むことで

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1=0$$

すなわち $\alpha^2+\alpha+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}+1=0$ という関係式が得られます。

これは $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ を満たしているということになり，$F(\alpha)=0$ ということが言えていることになります。

【解 2】(1) について

$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ は，$2a+1=\sqrt{5}$ を満たし，$(2a+1)^2=(\sqrt{5})^2$，
すなわち $a^2+a-1=0 \cdots$ ① を満たす。

今，$x^2-ax+1=0$ の判別式 D は $D=a^2-4$ であり，$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
に対して $D<0$ であるため，実数係数方程式 $f(x)=0$ は虚数解 α，$\overline{\alpha}$ をもつ。

このとき，$\alpha^2-a\alpha+1=0$ であり，$a=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$

① に代入すると，$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-1=0$

これより，$\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0$

すなわち，$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ を得る。

つまり，$F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ に対して，$F(\alpha)=0$

同様にして $F(\overline{\alpha})=0$ も得るため，$F(x)$ は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ すなわち
$f(x)$ で割り切れる。

【総括】

(1) は最悪実際に割り算して割り切れることを示すこともできますが，相当緊急避難に近い路線であり，解答のように実数係数の 2 次方程式 $f(x)=0$ の解 $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ に対して，$F(\alpha)=F(\overline{\alpha})=0$ を目指すことは睨みたいところです。

(2) は極形式で表すために必要な $\begin{cases}|\alpha| \\ \arg\alpha\end{cases}$ に対して，$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ ですから解と係数の関係を睨めば即 $|\alpha|=1$ ということが見えますから，実質 $\arg\alpha$ 勝負なのですが，(1) から $F(\alpha)=0$ ということで，$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ ということから，α が 1 の 5 乗根 (虚数) であり，$\mathrm{Im}(\alpha)>0$ ということから

$$\alpha=\cos\frac{2k}{5}\pi+i\sin\frac{2k}{5}\pi \quad (k=1,\ 2)$$

というのは見え見えで，あとはどっちだということで，解と係数の関係から得ている $\alpha+\overline{\alpha}=a$ を用いていきます。

結論は見えやすいですが，きちんと論じることができるかどうかという問題です。

(3) は $\alpha^5=1$ を用いて次数を下げていくという一本道ですから，確保したい所です。

$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}=\alpha^3+\alpha^{-3}$ まで次数を落としたところからが差が付きやすいところでしょう。

$\alpha^3=\cos\dfrac{6}{5}\pi+i\sin\dfrac{6}{5}\pi$，$\alpha^{-3}=\cos\dfrac{6}{5}\pi-i\sin\dfrac{6}{5}\pi$ ですから，

$\alpha^3+\alpha^{-3}=2\cos\dfrac{6}{5}\pi$ ということで，直接的な計算に持ち込むとなると，

$18°$ 絡みの三角比が必要になります。

もちろん，この話題に習熟していれば最悪 $\cos\dfrac{6}{5}\pi$ ($=\cos 216°$) を出すという緊急避難も考えられますが，$18°$ 絡みの三角比の導出は類題を通じた導出経験がないと厳しいものがあり，この非常口の扉を開けられるかどうかは別問題です。

ここでは導出過程は割愛しますが，$\cos 72°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ですから，

$$\begin{aligned}\cos 216° &= 4\cos^3 72°-3\cos 72° \\ &= 4\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)^3}{64}-3\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{16}-\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4} \\ &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

よって，$\alpha^3+\alpha^{-3}=2\cdot\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ となります。