$s$ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=s\,,\ (n+2)a_{n+1}=na_n+2\ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $a_n$ を $n$ と $s$ を用いて表せ。

(2) ある正の整数 $m$ に対して $\sum_{n=1}^{m}a_n=0$ が成り立つとする。$s$ を $m$ を用いて表せ。

＜ '23 東北大 ＞

**【戦略】**

(1) **経験がものをいう部分が大きいですが，両辺 $n+1$ をかけることで**

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)$$

**となり，$(n+1)na_n=b_n$ とおくことで，**

$$b_{n+1}=b_n+2(n+1)\ \ (\Leftrightarrow\ b_{n+1}-b_n=2(n+1))$$

**と，階差数列の構造が得られます。**

(2) **(1) で $a_n=1+\dfrac{2s-2}{n(n+1)}$ と得られており，$\sum a_n$ を捌くにあたっては**

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

**と部分分数分解を通じて差分解し，和の中抜けを狙う定番の流れです。**

【解答】

(1) $(n+2)a_{n+1}=na_n+2$ の両辺に $n+1$ をかけると

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)$$

$(n+1)na_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+2(n+1)$

$b_1=2\cdot1\cdot a_1=2s$ であり，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+1)\\&=2s+2\{\,2+3+\cdots+n\,\}\\&=2s+2\cdot\frac{(2+n)(n-1)}{2}\\&=n^2+n+2s-2\\&=n(n+1)+2s-2\end{aligned}$$

**初項 2，末項 $n$ 項数 $n-1$ の等差数列の和**

$$n(n+1)a_n=n(n+1)+2s-2$$

よって，$a_n=1+\dfrac{2s-2}{n(n+1)}$ …①

① に $n=1$ を代入すると，$a_1=1+\dfrac{2s-2}{1\cdot2}=s$ となり，① は $n=1$ のときも正しい結果を与える。

ゆえに，$n=1,\,2,\,3,\,\cdots$ に対して，$a_n=1+\dfrac{2s-2}{n(n+1)}$ …【答】

(2) $a_n=1+(2s-2)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}a_n&=\sum_{n=1}^{m}1+(2s-2)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=m+(2s-2)\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right\}\\&=m+(2s-2)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\\&=m+(2s-2)\cdot\frac{m}{m+1}\\&=m\left(1+\frac{2s-2}{m+1}\right)\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{m}a_n=0$ となるとき，$m\left(1+\dfrac{2s-2}{m+1}\right)=0$

$m>0$ なので，$1+\dfrac{2s-2}{m+1}=0$ であり，これより $s=-\dfrac{m-1}{2}$

以上から，$s=-\dfrac{m-1}{2}$ …【答】

**【戦略 2】(1) について**

$$a_1=s\ ,\ (n+2)a_{n+1}=na_n+2$$

**の両辺に $n+1$ をかけるということが見えなかった場合，愚直に実験して形を予想し，帰納法で裏付けることになります。**

【解 2】(1) について

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+2}(na_n+2)\ \cdots(*)$$

であり，

$a_1=s$

$a_2=\dfrac{1}{3}(1\cdot a_1+2)=\dfrac{s+2}{3}$

$a_3=\dfrac{1}{4}(2a_2+2)=\dfrac{1}{2}(a_2+1)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s+2}{3}+1\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s+5}{3}=\dfrac{s+5}{6}$

$a_4=\dfrac{1}{5}(3a_3+2)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{s+5}{2}+2\right)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{s+9}{2}=\dfrac{s+9}{10}$

$a_5=\dfrac{1}{6}(4a_4+2)=\dfrac{1}{3}(2a_4+1)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{s+9}{5}+1\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{s+14}{5}=\dfrac{s+14}{15}$

これより，

分母が 1，3，6，10，15，… より，

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

と予想できる。

**分母より 1 小さい**

分子は $s+\left(\dfrac{n(n+1)}{2}-1\right)$ と予想できる。

以上から，

$$a_n=\frac{s+\dfrac{n(n+1)}{2}-1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{2s+n(n+1)-2}{n(n+1)}=1+\frac{2s-2}{n(n+1)}\ \cdots(☆)$$

と予想できるため，これを $n$ に関する数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき，

(☆) に $n=1$ を代入すると，$a_1=1+\dfrac{2(s-1)}{1\cdot 2}=s$ より，
(☆) は $n=1$ のとき正しい結果を与える。

[2]　$n=k$（$k=1,2,\cdots$）のとき

$a_k=1+\dfrac{2s-2}{k(k+1)}$ が成り立つと仮定する。

(*) より，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{1}{k+2}(ka_k+2)\\&=\frac{1}{k+2}\left\{k\left(1+\frac{2s-2}{k(k+1)}\right)+2\right\}\\&=\frac{1}{k+2}\left\{k+\frac{2s-2}{k+1}+2\right\}\\&=\frac{1}{k+2}\cdot\frac{k(k+1)+(2s-2)+2(k+1)}{k+1}\\&=\frac{k^2+3k+2s}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{(k+1)(k+2)+2s-2}{(k+1)(k+2)}\\&=1+\frac{2s-2}{(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

より，(☆) は $n=k+1$ のときも正しい。

[1]，[2] より，$n=1,2,\cdots$ に対して $a_n=1+\dfrac{2s-2}{n(n+1)}$ が成立する。

【総括】

【解 1】の路線は経験がモノを言う部分が大きいですが，それなりに有名な発想であり，東北大受験生としては一度はお目にかかったことがあってほしい路線です。ただ，試験場でその路線がスムーズに出てきたかどうかについては定着度の問題と言えます。

実験 → 予想 → 帰納法という路線も残されてはいるため，粘り強さがあれば食らいつくことも可能です。

(2) は (1) と連動するため，下手するとまるごと落としかねない怖さがあります。

形だけでも類推できれば (2) も希望は繋がるでしょう。
( 形が類推できないと (2) はどうしようもないですからね。 )