2023 年度 東北大学 理系 第2問

関数 $f(x)=\sin 3x+\sin x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ。

(2) 正の整数 m に対して，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

＜ '23 東北大 ＞

【戦略】

(1) $f(x)=(3\sin x-4\sin^3 x)+\sin x=4\sin x(1+\sin x)(1-\sin x)$

と，3 倍角の公式を用いて $f(x)=0$ を整理すると，

$f(x)=0 \iff \sin x=0,\ 1,\ -1$ **ということになるため，**

$$x=\frac{n\pi}{2}\quad (n \text{ は整数})$$

と一般的に解けます。

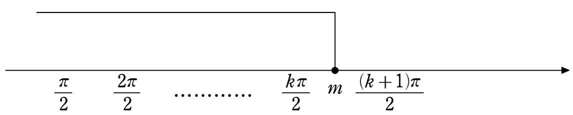
したがって，その中で正のものの最小値は $x=\frac{\pi}{2}$ となります。

(2) $\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \cdots$ **の中で m 以下のものを考えるにあたっては，**

m がどこにいるか

に興味があります。

数直線的なイメージで



m が $\frac{k\pi}{2}\leqq m<\frac{(k+1)\pi}{2}$ なる範囲にあるとすると，$f(x)=0$ の正の解のうち m 以下のものは $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \cdots\cdots,\ \frac{k\pi}{2}$ という k 個ということになり，$p(m)=k$ と式が立ちます。

よって，今回考える $\frac{p(m)}{m}$ は，$\frac{p(m)}{m}=\frac{k}{m}$ ということになります。

$\frac{k\pi}{2}\leqq m<\frac{(k+1)\pi}{2}$ という不等式を用いてはさみうちの原理に持ち込むことを考えれば，

$$\frac{k}{\frac{(k+1)\pi}{2}}<\frac{k}{m}\leqq\frac{k}{\frac{k\pi}{2}}$$

で，これを整理すると，$\dfrac{2}{\pi+\frac{\pi}{k}}<\dfrac{p(m)}{m}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ と挟めます。

$m\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ でもありますから，はさみうちの原理で解決です。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}\sin 3x+\sin x&=(3\sin x-4\sin^3 x)+\sin x\\&=4\sin x\,(1-\sin^2 x)\\&=4\sin x\,(1+\sin x)(1-\sin x)\end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)=0 \iff \sin x=0,\ 1,\ -1$

であり，$f(x)=0$ を満たす x は，n を整数として $x=\frac{n\pi}{2}$ と表せる。

このうち，正のもので最小であるのは $x=\frac{\pi}{2}$ …【答】

(2) $f(x)=0$ を満たす正の実数 x は

$$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{4\pi}{2},\ \cdots\cdots$$

よって，正の整数 k に対して，

$$\frac{k\pi}{2}\leqq m<\frac{(k+1)\pi}{2}$$

であるとすると，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち m 以下であるものは

$$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{k\pi}{2}$$

であり，その個数 $p(m)$ は $p(m)=k$ なので，$\frac{p(m)}{m}=\frac{k}{m}$

$$\frac{k}{\frac{(k+1)\pi}{2}}<\frac{k}{m}\leqq\frac{k}{\frac{k\pi}{2}}$$

よって，$\dfrac{2}{\pi+\frac{\pi}{k}}<\dfrac{p(m)}{m}\leqq\dfrac{2}{\pi}$

$m\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{2}{\pi+\frac{2}{k}}=\frac{2}{\pi}$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\frac{2}{\pi}$ …【答】

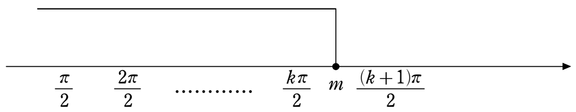
【総括】

(1) の三角関数についての方程式は基本的なレベルなので，落ち着いて確保したいところです。

(2) は m がどの範囲にいるのかということを自分で設定して話を進める必要があります。

ただ，その設定というハードルさえクリアーしてしまえば，はさんで，はさみうちの原理という流れ自体は見えやすいですし，評価自体もそこまで難解なものではありません。

なお，実質的には同じ狙い筋ですが，ガウス記号を用いて捌いたという受験生も一定数はいるでしょう。



というイメージから，$m=\left[\frac{(k+1)\pi}{2}\right]$ であるとき，$p(m)=k$ です。

（※ x 以下の最大整数を $[x]$ と表す。）

一般に $[x]$ に関して，$x-1<[x]\leqq x$ ということが言えます。

今回は，$\frac{(k+1)\pi}{2}-1<\left[\frac{(k+1)\pi}{2}\right]\leqq\frac{(k+1)\pi}{2}$ ，すなわち

$$\frac{(k+1)\pi}{2}-1<m\leqq\frac{(k+1)\pi}{2}$$

と言え，これを用いて $\frac{p(m)}{m}\left(=\frac{k}{m}\right)$ を評価すると

$$\frac{k}{\frac{(k+1)\pi}{2}}\leqq\frac{k}{m}<\frac{k}{\frac{(k+1)\pi}{2}-1}$$

すなわち，$\frac{2k}{\pi k+\pi}\leqq\frac{p(m)}{m}<\frac{2k}{\pi k+\pi-2}$ を得るため

$$\frac{2}{\pi+\frac{\pi}{k}}\leqq\frac{p(m)}{m}<\frac{2}{\pi+\frac{\pi-2}{k}}$$

となり，$m\to\infty$ のとき $k\to\infty$ ですから，はさみうちの原理より

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\frac{2}{\pi}$$

を得ます。