赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。 A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。 A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。 B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

＜ ’23 東北大 ＞

【戦略】

「確率では全てのものを区別せよ」という言葉に従い，
赤玉 4 個を R_1，R_2，R_3，R_4，**白玉 5 個を** W_1，W_2，W_3，W_4，W_5 **と区別して考えることにします。**

(1) **結局，引き分けになるのは A が白，B が赤を取り続けた場合に限られます。**

A **が取る白の番号の順番は** $5!$ **通り，**B **が取る赤の番号の順番は** $4!$ **通りあるため，求める確率は** $\dfrac{5!\cdot 4!}{9!}$ **ということになります。**

(2) A **が何回目に勝つかで場合分けすれば**

取り出す人	A
取り出した玉の色	赤

取り出す人	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	赤

取り出す人	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	赤

取り出す人	A	B	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	白	赤	赤

と分けられますので，それぞれの場合について，白を取る番号の順序，赤を取る番号の順序を考えていきます。

【解答】

赤玉 4 個を R_1，R_2，R_3，R_4，白玉 5 個を W_1，W_2，W_3，W_4，W_5 と区別して考える。

(1)

取り出す人	A	B	A	B	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	白	赤	白	赤	白

というように取り出した場合が引き分けとなる。

取り出し方の総数は $9!$【通り】

$\begin{cases} \text{A が白をとる順序が } 5! \text{ 通り} \\ \text{B が赤をとる順序が } 4! \text{ 通り} \end{cases}$ あるため，上のように取り出す

取り出し方は $5!\cdot 4!$【通り】

求める確率は $\dfrac{5!\cdot 4!}{9!}=\dfrac{1}{126}$ …【答】

(2) A が勝つとき，

取り出す人	A
取り出した玉の色	赤

…[1]

取り出す人	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	赤

…[2]

取り出す人	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	赤

…[3]

取り出す人	A	B	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	白	赤	赤

…[4]

の 4 パターンがあり得る

[1] のような勝ち方をするとき，その確率は $\dfrac{4}{9}$

[2] のような勝ち方をするとき，その確率は $\dfrac{{}_5P_1\cdot{}_4P_2}{{}_9P_3}=\dfrac{5}{42}$

[3] のような勝ち方をするとき，その確率は $\dfrac{{}_5P_2\cdot{}_4P_3}{{}_9P_5}=\dfrac{2}{63}$

[4] のような勝ち方をするとき，その確率は $\dfrac{{}_5P_3\cdot{}_4P_4}{{}_9P_7}=\dfrac{1}{126}$

[1]，[2]，[3]，[4] は同時に起こらないので，求める確率は

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{42}+\frac{2}{63}+\frac{1}{126}=\frac{38}{63} \quad \cdots\text{【答】}$$

【総括】

(1)，(2) ともに題意を満たすような色の取り出し方は限定できますから，あとは番号の順序を考えればおしまいです。

怖いのは計算ミスぐらいのもので，丁寧に解き切って勢いをつけていきたいところです。

玉に番号をつけないとなると

赤 4 個と白 5 個の並べ方の総数は ${}_9C_4=126$【通り】

(1) 126 通りのうち，白赤白赤白赤白赤白 と並ぶ 1 通りが引き分けとなる並びで，求める確率は $\dfrac{1}{126}$

(2)

取り出す人	A
取り出した玉の色	赤

…[1]

取り出す人	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	赤

…[2]

取り出す人	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	赤

…[3]

取り出す人	A	B	A	B	A	B	A
取り出した玉の色	白	赤	白	赤	白	赤	赤

…[4]

[1] のとき，残りの玉の並べ方は ${}_8C_3=56$【通り】

[2] のとき，残りの玉の並べ方は ${}_6C_2=15$【通り】

[3] のとき，残りの玉の並べ方は ${}_4C_1=4$【通り】

[4] のとき，残りの玉の並べ方は 1【通り】

よって，A が勝つような玉の並び方は $56+15+4+1=76$【通り】

したがって，求める確率は $\dfrac{76}{126}=\dfrac{38}{63}$

というような解答例となります。