

a, b を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする。また、座標平面上で原点を中心とする半径1の円を C とし、 C の内部にある2点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ を考える。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を考え、 P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

(1) $f(\theta) = ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta$ とおく。方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つ存在することを示せ。

(2) D の座標を b, θ を用いて表せ。

(3) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、3点 A, P, D が同一直線上にあるような θ は少なくとも1つ存在することを示せ。また、このような θ はただ1つであることを示せ。

< '23 北海道大 >

【戦略】

(1) 一中間値の定理を用いることが嗅ぎ取れますので

$f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の値を調べることになります。

(2) P における接線の方程式が $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1$ となりますから

D の座標を (α, β) などとおき、 $\begin{cases} \text{線分 } BD \text{ の中点が } \ell \text{ 上} \\ \text{直線 } BD \perp \ell \end{cases}$

という2条件を用いて α, β を導出すればよいでしょう。

(3) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta - a \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ と比較的容易に表せます。

そこで、 \overrightarrow{AP} の法線ベクトル $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ a - \cos \theta \end{pmatrix}$ を考え、直線 AP が

$(a, 0)$ を通り $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ a - \cos \theta \end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもつ直線であることから

$$(\sin \theta)(x - a) + (a - \cos \theta)y = 0$$

と得られますので、これが $D(2 \cos \theta - b \sin 2\theta, 2 \sin \theta + b \cos 2\theta)$ を通るとして代入すればよいでしょう。

整理すると、うまく(1)で考えた $f(\theta) = 0$ という関係式が得られますから、存在性の証明は終わっているも同然です。

一意性については、

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2ab \sin 2\theta + a \cos \theta + b \sin \theta \\ &= a \cos \theta + b \sin \theta - 4ab \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

を調べることになりますが、これ以上微分していてもキリがありません。

形から相加平均・相乗平均の関係を用いることを考えます。

【解答】

$$(1) \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a^2 + b^2 < 1 \end{cases} \quad \text{より, } 0 < a < 1, 0 < b < 1 \dots \textcircled{1}$$

$$f(0) = ab - b = b(a - 1) < 0 \quad (\because \textcircled{1}) \dots \textcircled{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -ab + a = a(1 - b) > 0 \quad (\because \textcircled{1}) \dots \textcircled{3}$$

$f(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で連続関数であるため、 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より $f(\theta) = 0$ となる θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つ存在する。

(2) $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における C の接線を ℓ とすると、 ℓ の方程式は

$$(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1$$

$B(0, b)$ の ℓ に関する対称点 D の座標を (α, β) とする。

線分 BD の中点 $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{b + \beta}{2}\right)$ が ℓ 上にあることから

$$\frac{\alpha}{2} \cos \theta + \frac{b + \beta}{2} \sin \theta = 1$$

$$\text{すなわち } \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 2 - b \sin \theta \dots \textcircled{4}$$

一方、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 ℓ の傾きは0とならないため、直線 BD には傾きが存在し、 $\frac{\beta - b}{\alpha}$

$$\ell \perp (\text{直線 } BD) \text{ であるため, } -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\beta - b}{\alpha} = -1$$

$$\text{すなわち, } \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta = -b \cos \theta \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}, \textcircled{5}$ を満たす α, β を求めて、

$$\begin{cases} \alpha = 2 \cos \theta - 2b \sin \theta \cos \theta = 2 \cos \theta - b \sin 2\theta \\ \beta = 2 \sin \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2 \sin \theta + b \cos 2\theta \end{cases}$$

ゆえに、 $D(2 \cos \theta - b \sin 2\theta, 2 \sin \theta + b \cos 2\theta) \dots$ 【答】

$$(3) \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta - a \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって、 \overrightarrow{AP} の法線ベクトルとして $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ a - \cos \theta \end{pmatrix}$ がとれる。

直線 AP は $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ a - \cos \theta \end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもつ $(a, 0)$ を通る直線なので、その方程式は

$$(\sin \theta)(x - a) + (a - \cos \theta)y = 0$$

これが D $(2 \cos \theta - b \sin 2\theta, 2 \sin \theta + b \cos 2\theta)$ を通るので

$$\sin \theta (2 \cos \theta - b \sin 2\theta - a) + (a - \cos \theta)(2 \sin \theta + b \cos 2\theta) = 0$$

$$2 \sin \theta \cos \theta - b \sin 2\theta \sin \theta - a \sin \theta + 2a \sin \theta + ab \cos 2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta - b \cos 2\theta \cos \theta = 0$$

$$ab \cos 2\theta - b(\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) + a \sin \theta = 0$$

ゆえに、 $ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta = 0$

$f(\theta) = ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta$ とおくと

$$f'(\theta) = -2ab \sin 2\theta + a \cos \theta + b \sin \theta = a \cos \theta + b \sin \theta - 4ab \sin \theta \cos \theta$$

ここで、①、及び $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases}$ であることから
相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$a \cos \theta + b \sin \theta \geq 2\sqrt{ab \sin \theta \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに、} f'(\theta) &\geq 2\sqrt{ab \sin \theta \cos \theta} - 4ab \sin \theta \cos \theta \\ &= 2\sqrt{ab \sin \theta \cos \theta} \{1 - 2\sqrt{ab \sin \theta \cos \theta}\} \\ &= 2\sqrt{ab \sin \theta \cos \theta} \{1 - \sqrt{4ab \sin \theta \cos \theta}\} \\ &= 2\sqrt{ab \sin \theta \cos \theta} \{1 - \sqrt{2ab \sin 2\theta}\} \end{aligned}$$

再び相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} (= 2ab)$$

①より、 $1 > a^2 + b^2 (\geq 2ab)$ であるため、 $0 < 2ab < 1$

したがって、 $0 < 2ab \sin 2\theta < 1$ であるため、 $0 < \sqrt{2ab \sin 2\theta} < 1$

これより、 $f'(\theta) \geq 0$ である。

ゆえに、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f(\theta)$ は単調増加であるため、(1)の結果と合わせると、 $f(\theta) = 0$ となる θ がただ1つ存在する。

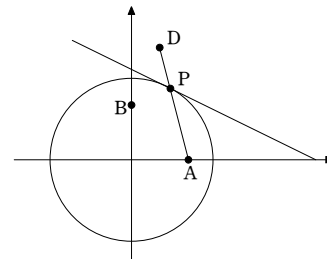
【戦略2】(3)について

通常、

A, B を決める \rightarrow P を決めて接線を引く \rightarrow B の対称点 D をとる

という流れをとると思いますが、恐らくこれだと、A, P, D が一直線になるような絵をうまく描けないと思います。(大抵曲がっちゃう)

A, P, D が同一直線上にあるという状況をキレイにお絵描きしようと思うと



B を決める

\rightarrow P を決めて接線を引く

\rightarrow D をとる

\rightarrow 直線 PD を出して x 軸との交点を A とする

と、A は後から決めればキレイにお絵描きできます。

この絵のイメージで

直線 PD の x 切片が a であるということを言えばよいわけです。

その場合、 θ の一意性については

$$a = \frac{b \cos \theta}{b \cos 2\theta + \sin \theta}$$

と見ます。

「a をこれ！」と決めたととき、 θ が一意的に定まるというのが本来の流れです。

ただ、上のイメージでお絵描きすると、

θ が違うと a も違ってくるのか？

という観点でモノが見えてきます。

【解2】(3)について

$$(3) \quad \overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} (2 \cos \theta - b \sin 2\theta) - \cos \theta \\ (2 \sin \theta + b \cos 2\theta) - \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta - b \sin 2\theta \\ \sin \theta + b \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

よって、直線 PD 上の点 (x, y) は実数 t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t \overrightarrow{PD} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos \theta - b \sin 2\theta \\ \sin \theta + b \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

と表せる。

A $(a, 0)$ が直線 PD 上にあるときを考えるので

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos \theta - b \sin 2\theta \\ \sin \theta + b \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} a = \cos \theta + t(\cos \theta - b \sin 2\theta) \dots \textcircled{6} \\ 0 = \sin \theta + t(\sin \theta + b \cos 2\theta) \dots \textcircled{7} \end{cases}$$

ここで、

$$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \text{ のときは } \sin \theta + b \cos 2\theta > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi \text{ のときは } -\frac{b}{\sqrt{2}} < b \cos 2\theta < 0 \text{ であり, } 0 < b < 1 \text{ を}$$

$$\text{考えると, } -\frac{1}{\sqrt{2}} < b \cos 2\theta < 0$$

$$\text{一方, } \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin \theta < 1 \text{ なので, } \sin \theta + b \cos 2\theta > 0$$

いずれにせよ、 $\sin \theta + b \cos 2\theta > 0$ であるため、⑦より

$$t = \frac{-\sin \theta}{\sin \theta + b \cos 2\theta}$$

$$\textcircled{6} \text{ より, } a = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sin \theta + b \cos 2\theta} (\cos \theta - b \sin 2\theta)$$

$$a(\sin \theta + b \cos 2\theta) = \cos \theta (\sin \theta + b \cos 2\theta) - \sin \theta (\cos \theta - b \sin 2\theta)$$

$$a \sin \theta + ab \cos 2\theta = b(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta)$$

$$a \sin \theta + ab \cos 2\theta = b \cos(2\theta - \theta)$$

ゆえに、 $ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta = 0 \dots (*)$

(1)より、これを満たす θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つ存在する。

また、(*)は $a = \frac{b \cos \theta}{b \cos 2\theta + \sin \theta}$ ($=g(\theta)$ とおく)と変形できる。

$$g'(\theta) = \frac{-b \sin \theta (b \cos 2\theta + \sin \theta) - b \cos \theta (-2b \sin 2\theta + \cos \theta)}{(b \cos 2\theta + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{-b^2 \cos 2\theta \sin \theta - b \sin^2 \theta + 2b^2 \sin 2\theta \cos \theta - b \cos^2 \theta}{(b \cos 2\theta + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{b^2 (\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta) + b^2 \sin 2\theta \cos \theta - b}{(b \cos 2\theta + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{b^2 \sin(2\theta - \theta) + 2b^2 \sin \theta \cos^2 \theta - b}{(b \cos 2\theta + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{2b^2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + b^2 \sin \theta - b}{(b \cos 2\theta + \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{b(-2b \sin^3 \theta + 3b \sin \theta - 1)}{(b \cos 2\theta + \sin \theta)^2}$$

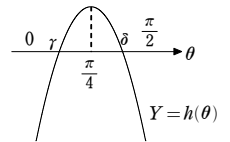
ここで、 $h(\theta) = -2b \sin^3 \theta + 3b \sin \theta - 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)とおく。

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= -6b \sin^2 \theta \cos \theta + 3b \cos \theta \\ &= -3b \cos \theta (2 \sin^2 \theta - 1) \\ &= 3b \cos \theta \cos 2\theta \end{aligned}$$

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$...	$(\frac{\pi}{2})$
$h'(\theta)$		+	0	-	
$h(\theta)$	-1	↗	$\sqrt{2}b - 1$	↘	$b - 1$

$\sqrt{2}b - 1 > 0$ と仮定すると、 $\frac{1}{\sqrt{2}} < b < 1 \dots (\star)$ であり、

$g'(\theta)$ の符号は $h(\theta)$ の符号と一致する。



ゆえに、

θ	(0)	...	γ	...	$\frac{\pi}{4}$...	δ	...	$(\frac{\pi}{2})$
$g'(\theta)$		-	0	+	+	+	0	-	
$g(\theta)$	1	↘		↗	b	↗	$g(\delta)$	↘	0

となる γ, δ が存在し、このとき、 $b < g(\delta) \dots \textcircled{8}$

さて、 $a = g(\theta)$ とおいていたこと、及び $a^2 + b^2 < 1$ という条件から

$$g(\delta)^2 + b^2 < 1$$

であり、⑧から、 $b^2 + b^2 < 1$ 、すなわち $b^2 < \frac{1}{2}$ となる。

これより、 $0 < b < \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるが、これは(★)に矛盾する。

ゆえに、 $\sqrt{2}b - 1 \leq 0$ であり、 $h(\theta) \leq 0$ 、すなわち $g'(\theta) \leq 0$

よって、 $g(\theta)$ は単調減少となり、(*)を満たす θ はただ1つである。

【総括】

(1), (2) までは基本的な内容です。

(3) も A, P, D が同一直線上にあるという共線条件を立式していくと (1) の $f(\theta)=0$ という関係式が得られますから、前半の存在証明については自動的に終わります。つまり、ここまでは何とか確保したい内容と言えましょう。

難しいのは後半の一意性の証明です。

形から相加平均・相乗平均の関係をスムーズに思いつけばよいし、聞けば簡単なのですが、実際の試験場では難しいでしょう。

この問題で登場する A, B, P, D のうち、 B, P, D は連動していますが、基本的に A は無関係な点です

(3) で初めて A も関連性をもって来るわけです。

B, P, D という順番で点を定めていき、 DP をズドンと引いて A を決めると見れば、うまくお絵描きできます。

なにより、 $a = \frac{b \cos \theta}{b \cos 2\theta + \sin \theta}$ と見ることができます。

$b, \theta (B, P, D)$ が定まって、 $a (A)$ が定まる

という構造的なものが見えるわけです。

そうなると、 θ が違えば a も違うのか？ というところで単調性を疑えます。

【解2】の路線では途中、単純に単調性を持たない可能性が出てくるところで焦るかもしれません。

翻訳しきれしていない $a^2 + b^2 < 1$ という問題ならではの条件を用いて冷静にその可能性を否定する部分に注意しましょう。