n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1, a_2, ……, a_n とし,

$$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$$

とおく。また, K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1) $K_3=5$ となる確率を求めよ。

(2) q_n を求めよ。また, $K_n=q_n$ となるための a_1, a_2, ……, a_n に関する必要十分条件を求めよ。

(3) n を 4 以上の自然数とする。$L_n=K_n+|a_4-4|$ とおき, L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。$L_n=r_n$ となる確率 p_n を求めよ。

< '23 北海道大 >

【戦略】

ひとまず両端の $|1-a_1|$, $|a_n-6|$ については符号チェンジで絶対値が外れることが確定するため,

$$\begin{aligned}K_n&=(a_1-1)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+(6-a_n)\\&=5+(a_1-a_n)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\end{aligned}$$

となります。

(1) **K_3 について**

$$K_3=5+(a_1-a_3)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$$

なのですが, 絶対値は通常

$$|A|=\begin{cases}A & (\text{そのまま}) \quad (A\geqq 0 \text{ のとき})\\ -A & (\text{符号チェンジ}) \ (A<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

という形で外します。ただ, 今回は

$$K_3=\begin{cases}5+2(a_1-a_3) & (\text{そのまま\&そのまま})\\ 5+2(a_1-a_2) & (\text{そのまま\&符号チェンジ})\\ 5+2(a_2-a_3) & (\text{符号チェンジ\&そのまま})\\ 5 & (\text{符号チェンジ\&符号チェンジ})\end{cases}$$

となるので, $K_n=5$ となる瞬間を「符号チェンジ&符号チェンジ」の場合に集約させるために, $|A|=\begin{cases}A & (A>0 \text{ のとき})\\ -A & (A\leqq 0 \text{ のとき})\end{cases}$ という形で絶対値を外します。

そうなると, $K_n=5$ となるのは $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ となるときです。
なので, $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) の総数を考えればよくなります。
これはいわゆる重複組合せであり, ○と仕切りの並べ方の問題に帰着します。

(2) **(1) の要領から $K_n\geqq 5$ (等号成立は $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ のとき) ということが予想できますので, 数学的帰納法で示します。**

(3) **(2) から, $L_n\geqq 5$ であり, 等号成立は $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n$ かつ $a_4=4$ のときに限ることが分かります。**

つまり, 結局は $\begin{cases}1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq 4\\ a_4=4\\ 4\leqq a_5\leqq a_6\leqq\cdots\leqq a_n\leqq 6\end{cases}$ **となるときを考えます。**

この後の処理は (1) 同様に○と仕切りの並べ方に対応させて捌きます。

【解答】

$1\leqq a_1\leqq 6$, $1\leqq a_n\leqq 6$ であるため, $\begin{cases}1-a_1\leqq 0\\ a_n-6\leqq 0\end{cases}$ であるから

$$\begin{aligned}K_n&=(a_1-1)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+(6-a_n)\\&=5+(a_1-a_n)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\end{aligned}$$

(1) $K_3=5+(a_1-a_3)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$

[1] $\begin{cases}a_1-a_2>0\\ a_2-a_3>0\end{cases}$, すなわち $a_1>a_2>a_3$ のとき

$$\begin{aligned}K_3&=5+(a_1-a_3)+(a_1-a_2)+(a_2-a_3)\\&=5+2(a_1-a_3)\end{aligned}$$

このとき, $K_3>5$ であるため, $K_3=5$ とはならない。

[2] $\begin{cases}a_1-a_2>0\\ a_2-a_3\leqq 0\end{cases}$, すなわち $a_1>a_2$ かつ $a_2\leqq a_3$ のとき

$$\begin{aligned}K_3&=5+(a_1-a_3)+(a_1-a_2)+(a_3-a_2)\\&=5+2(a_1-a_2)\end{aligned}$$

このとき, $K_3>5$ であるため, $K_3=5$ とはならない。

[3] $\begin{cases}a_1-a_2\leqq 0\\ a_2-a_3>0\end{cases}$, すなわち $a_1\leqq a_2$ かつ $a_2>a_3$ のとき

$$\begin{aligned}K_3&=5+(a_1-a_3)+(a_2-a_1)+(a_2-a_3)\\&=5+2(a_2-a_3)\end{aligned}$$

このとき, $K_3>5$ であるため, $K_3=5$ とはならない。

[4] $\begin{cases}a_1-a_2\leqq 0\\ a_2-a_3\leqq 0\end{cases}$, すなわち $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ のとき

$$\begin{aligned}K_3&=5+(a_1-a_3)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)\\&=5\end{aligned}$$

以上 [1], [2], [3], [4] より, $K_3=5$ となるのは $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ となるときに限り, そうなるときの確率を求める。

3 回さいころを投げたときの目の出方の総数は 6^3 通り

このうち, $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ となるような目の出方の総数について考える。

○を 3 個, 仕切りを 5 本用意し, これらを並べたとき, 6 個の領域に分けられることになり, それらを D_1, D_2, …, D_6 と呼ぶ。

D_i に含まれている○の個数を数字 i を用いる個数と対応させる。

(例： $\overset{D_1}{|}\ \overset{D_2}{○}\ \overset{D_3}{|}\ \overset{D_4}{|}\ \overset{D_5}{|}\ ○\ ○\ \overset{D_6}{|}$ だと, 2 を 1 個, 5 を 2 個使用することになり, $(a_1, a_2, a_3)=(2, 5, 5)$ に対応する。)

よって, $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ を満たす (a_1, a_2, a_3) の組の総数は
3 個の○と 5 本の仕切りを並べる総数に等しく, ${}_8C_3=56$【通り】

ゆえに, $K_3=5$ となる確率は $\dfrac{56}{6^3}=\dfrac{7}{27}$ …【答】

© MathClinic

(2) $n=2,3,4,\cdots$ に対して，

$K_n \geqq 5$ （等号成立は $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のときに限る） …(*)

であることを n に関する数学的帰納法で示す。

[1] $n=2$ のとき

$$K_2 = 5+(a_1-a_2)+|a_1-a_2| = \begin{cases} 5 & (a_1 \leqq a_2 \text{ のとき}) \\ 5+2(a_1-a_2) & (a_1 > a_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_1 > a_2$ のときは $K_2 > 5$ なので，$K_2 \geqq 5$

また，等号成立は $a_1 \leqq a_2$ のときに限る。

ゆえに，$n=2$ のときは (*) は正しい。

[2] $n=m$ $(m=2,3,\cdots)$ のとき

$K_m \geqq 5$ かつ 等号成立は $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m$ のときに限る

と仮定する。

このとき，

$$K_{m+1} = (a_1-1)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|+|a_m-a_{m+1}|+(6-a_{m+1})$$
$$K_m = (a_1-1)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|+(6-a_m)$$

辺々引くと，

$$K_{m+1}-K_m = |a_m-a_{m+1}|+(a_m-a_{m+1})$$

ゆえに，$K_{m+1} = K_m+|a_m-a_{m+1}|+(a_m-a_{m+1})$

$a_m \leqq a_{m+1}$ のときは $K_{m+1} = K_m \geqq 5$ …(☆)（∵ 帰納法の仮定）

$a_m > a_{m+1}$ のときは $K_{m+1} = K_m+2(a_m-a_{m+1})$
$> K_m$
$\geqq 5$（∵ 帰納法の仮定）

いずれにせよ，$K_{m+1} \geqq 5$ である。

また，等号成立は，$a_m \leqq a_{m+1}$ かつ (☆) の等号が成立するときであり，すなわち

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_m \leqq a_{m+1}$$

となるときである。

以上から，$n=m+1$ のときも (*) は正しい。

[1], [2] から，$n=2,3,4,\cdots$ に対して，

$K_n \geqq 5$ であり，等号成立は $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のときに限る

ということが示されたため，K_n の最小値 q_n は $q_n=5$ …【答】

また，$K_n = q_n$ となるための必要十分条件は

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \quad \cdots\text{【答】}$$

(3) $L_n = K_n+|a_4-4| \geqq q_n+0$

(2) より，$L_n \geqq 5$ であり，等号成立は

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n \text{ かつ } a_4=4$$

ゆえに $r_n=5$ であり，$L_n=5$ となる確率 p_n を考える。

$n \geqq 5$ のとき

$L_n=5$ となるのは
$$\begin{cases} 1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 4 & \cdots① \\ a_4=4 \\ 4 \leqq a_5 \leqq a_6 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq 6 & \cdots② \end{cases}$$

となるときである。

① を満たす (a_1, a_2, a_3) の総数は 3 個の ○ と 3 本の仕切りの並べ方の総数を考え，${}_6C_3=20$【通り】

② を満たす $(a_5, a_6, \cdots, a_n)$ の総数は $n-5+1$ ($=n-4$) 個の ○ と 2 本の仕切りの並べ方の総数を考え

$${}_{n-2}C_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \text{【通り】}$$

よって，$L_n=5$ となるような $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の総数は

$$20 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 10(n-2)(n-3) \text{【通り】} \cdots(★)$$

なお，$n=4$ のとき $L_4=5$ となる条件は

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 4 \text{ かつ } a_4=4$$

であり，これを満たす (a_1, a_2, a_3, a_4) の総数は

$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 4$ を満たす (a_1, a_2, a_3) の総数

に等しく，3 個の ○ と 3 本の仕切りの並べ方の総数

${}_6C_3=20$【通り】

であるため，(★) は $n=4$ のときも正しい結果を与える。

n 回さいころを投げたときの目の出方の総数は 6^n 通りであるため

$$p_n = \frac{10(n-2)(n-3)}{6^n} \quad \cdots\text{【答】}$$

© MathClinic

【総括】

絶対値の外れ方によって，K_n がどのような値になるかをしっかりと整理する必要があり，結局何が起こっていればよいのかを噛み砕く咀嚼力が求められます。

なお，三角不等式

$$|a+b| \leqq |a|+|b| \quad (\text{等号成立は } ab \geqq 0 \text{ のとき})$$

を用いると

(1) は

$$\begin{aligned} K_3 &= |1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-6| \\ &\geqq |(1-a_1)+(a_1-a_2)|+|a_2-a_3|+|a_3-6| \\ &= |1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-6| \\ &\geqq |(1-a_2)+(a_2-a_3)|+|a_3-6| \\ &= |1-a_3|+|a_3-6| \\ &\geqq |(1-a_3)+(a_3-6)| \\ &= |1-6| \\ &= 5 \end{aligned}$$

等号成立は $\begin{cases} (1-a_1)(a_1-a_2) \geqq 0 \\ (1-a_2)(a_2-a_3) \geqq 0 \\ (1-a_3)(a_3-6) \geqq 0 \end{cases}$ のときなのですが，

$1-a_i \leqq 0$ $(i=1, 2, 3)$ なので，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ のときに等号成立ということになります。

(2) も

$$\begin{aligned} K_n &= |1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6| \\ &\geqq |1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6| \\ &\quad \vdots \\ &\geqq |1-6| \\ &= 5 \end{aligned}$$

であり，等号成立は $\begin{cases} (1-a_1)(a_1-a_2) \geqq 0 \\ (1-a_2)(a_2-a_3) \geqq 0 \\ \quad \vdots \\ (1-a_{n-1})(a_{n-1}-a_n) \geqq 0 \\ (1-a_n)(a_n-6) \geqq 0 \end{cases}$ のときですが

$1-a_i \leqq 0$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ なので，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n$ のときに K_n は最小値 5 をとることになります。

ただ，この三角不等式の解答は観賞用の路線と言ってよく，試験場の場合はこの路線が出てくる人の方がレアでしょう。

© MathClinic