以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし，$f(x)=xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)}=c$ をみたす正の実数 x，y の組がただ１つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x，y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

＜ ’23 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **方程式が定数分離の形で与えられているため，$y=f(x)$，$y=k$ のグラフの交点の個数を捉えればよいでしょう。**

$y=f(x)$ のグラフについては丁寧に微分して捌くのみです。

(2) **与えられた等式は $f(x)f(y)=c$ という形です。**

ひとまず y の値を固定すると，$f(x)=\dfrac{c}{f(y)}$（＝定数）という形となりますので，これを満たす正の実数 x がただ１つであるための条件を (1) の結果を用いて求めます。

(1) の結果を用いると，$\dfrac{c}{f(y)}=\dfrac{1}{e}$ となればよいことが分かりますから $f(y)=ce$（＝定数）となり，今度は y の固定を外し，y についての方程式と見ることで，$f(y)=ce$ を満たす正の実数 y がただ１つ存在するための

ce という定数が満たすべき条件

を考えれば解決です。

(3) **(2) 同様，ひとまず y を固定して考えると，**

$$f(x)=\frac{\frac{3}{e^4}}{f(y)}\ (=\text{定数})$$

を満たす正の実数 x が存在するための条件を考えます。

（目がチカチカするので，$C=\dfrac{3}{e^4}$ とおき，$f(x)=\dfrac{C}{f(y)}$ とします。）

これを満たす正の実数 x が存在するための条件は (1) のグラフを考えると，

$$0<\frac{C}{f(y)}\leqq\frac{1}{e}$$

ですから，特に右側の不等式から

$$f(y)\geqq Ce=\frac{3}{e^3}=f(3)$$

という結果を得ます。

ここで，y を変数と見て，$z=f(y)$ のグラフを考えることで y としてあり得る値の最大値が分かり，そのときの x も芋づる式に求まります。

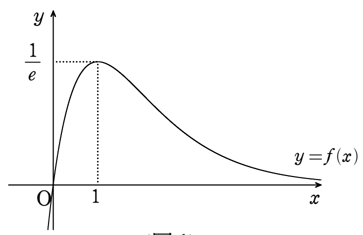
【解答】

(1) $f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})$
$\quad=e^{-x}(1-x)$

よって，以下の増減表を得る。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

$y=f(x)$ のグラフは以下の (図 1) のようになる。



(図 1)

$f(x)=k$ を満たす実数 x は $y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの交点の x 座標を表すため，方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} k>\dfrac{1}{e} \text{ のとき } 0\text{個} \\ k=\dfrac{1}{e} \text{ または } k\leqq 0 \text{ のとき } 1\text{個} \\ 0<k<\dfrac{1}{e} \text{ のとき } 2\text{個} \end{cases}$$ …【答】

(2) $xye^{-(x+y)}=c$，すなわち $f(x)f(y)=c$ を満たす正の実数 x，y の組がただ１つ存在するような c の値を考える。

正の実数 y の値を固定すると，(図 1) より $f(y)>0$ であり

$$f(x)=\frac{c}{f(y)}\ \cdots①$$

① を満たす正の実数 x がただ１つ存在するための条件は (1) の結果から

$$\frac{c}{f(y)}=\frac{1}{e}$$

すなわち，$f(y)=ce$ …②

固定していた y を変数と見て，② を y についての方程式と見ると ② を満たす正の実数 y の値がただ１つ存在するための条件は再び (1) の結果を用いると

$$ce=\frac{1}{e}$$

すなわち，$c=\dfrac{1}{e^2}$

以上から，題意を満たすような c の値は $c=\dfrac{1}{e^2}$ …【答】

(3) $\dfrac{3}{e^4}=C$ とおく。

$f(x)f(y)=C$ に対して正の実数 y の値を固定して考えると $f(y)>0$ であるから

$$f(x)=\frac{C}{f(y)} \quad \cdots ③$$

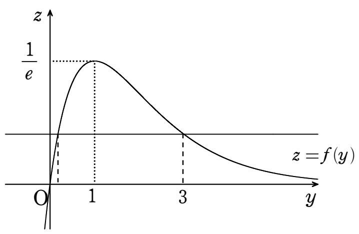
これを満たす正の実数 x が存在するための条件は

$$0<\frac{C}{f(y)}\leqq\frac{1}{e}$$

特に右側の不等式から $f(y)\geqq Ce$，すなわち

$$f(y)\geqq\frac{3}{e^3}\ (=f(3)) \quad \cdots ④$$

を得る。



(図 2)

(図 2) に示した $z=f(y)$ のグラフより，④ を満たすような y の最大値は

$$y=3 \quad \cdots【答】$$

このとき ③ から，$f(x)=\dfrac{C}{f(y)}=\dfrac{\frac{3}{e^4}}{\frac{3}{e^3}}=\dfrac{1}{e} \quad \cdots ⑤$

⑤ を満たす正の実数 x は (図 1) より，$x=1 \quad \cdots$【答】

【総括】

(1) を失うと，その後も雪崩式に崩れていきますので，確実に確保しましょう。

実質的には (2) 以降が勝負となります。

独立 2 変数「関数」の最大最小問題では

1 文字を固定するという予選決勝法

と，ある程度経験がある受験生も少なくはないでしょう。

ただ，本問で問題となっている「方程式」に対しては，自信が持てなかった受験生も一定数いたのではないかと思います。
(最大最小問題について「予選・決勝」という言葉を用いるのはしっくりきますが，方程式に対しては「予選・決勝」という言葉を用いるのは何かニュアンスが違うような気がします。大切なのは一気に動かさずに 1 文字ずつ動かすということです。)

個人的には今年のセットで合否を分ける絶妙なラインの難易度だと思います。