O を原点とする座標空間において，3 点 A(4，2，1)，B(1，−4，1)，C(2，2，−1) を通る平面を α とおく。また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする。ただし，S の中心 P の z 座標は正とする。

(1) 線分 AP の長さを求めよ。

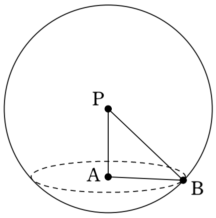
(2) P の座標を求めよ。

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

＜ '23 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **状況を図示してみると，**



という状況です。 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ **は計算できますし，** $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ **は半径 9 なので三平方の定理で即解決です。**

(2) $\mathrm{P}(p，q，r)$ **などとおくと，** $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=6$ **ということから**

$$(p-4)^2+(q-2)^2+(r-1)^2=36$$

ということが言えます。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp$(**平面**ABC) **ということから，** $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$

ということで， $p，q，r$ **という未知数 3 個に対して，条件も 3 つ手元にあるため，この後は消化試合でしょう。**

(3) (2) **が正しく計算してあれば，** P(0，4，5) **が得られています。**

つまり，この球面 S **の方程式は**

$$x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$$

ということになります。

球面 S **と直線** OC **の交点を考えるにあたっては，当然連立することを考えるわけですが，空間座標における直線については**

ベクトル方程式

で表現します。

つまり，直線 OC **上の点** T **を** $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (t **は実数**) **と表し，**
この T **が球面** S **にも乗っかっているような**

「上手い倍率 t **」**

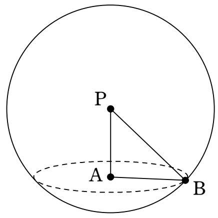
を考えるわけです。

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix}$$



これより，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3)^2+(-6)^2=45$

また，S と α の交円の中心が A なので，線分 AP は平面 α と直交する。

ゆえに三平方の定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}&=\sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{AB}^2}\\&=\sqrt{9^2-45}\\&=6\ \cdots【答】\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(p，q，r)$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-4\\q-2\\r-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3(p-4)-6(q-2)=-3p-6q+24\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-2(p-4)-2(r-1)=-2p-2r+10\end{cases}$$

$\mathrm{AP}\perp\alpha$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

よって，$\begin{cases}-3p-6q+24=0\\-2p-2r+10=0\end{cases}$ であり，$\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2}p+4\\ r=-p+5\end{cases}$

(1) の結果から $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=36$ なので，

$$(p-4)^2+(q-2)^2+(r-1)^2=36$$

ゆえに，$(p-4)^2+\left\{\left(-\dfrac{1}{2}p+4\right)-2\right\}^2+\{(-p+5)-1\}^2=36$

展開すると，$\dfrac{9}{4}p^2-18p=0$ で，整理すると $p(p-8)=0$

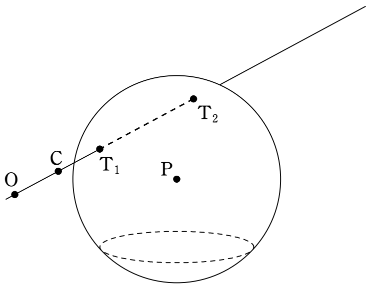
よって，$(p，q，r)=(0，4，5)，(8，0，-3)$

条件から $r>0$ であるため，P の座標は (0，4，5) ⋯【答】

(3) 直線 OC 上の点 T は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}2t\\2t\\-t\end{pmatrix}$$

と表せる。



(2) の結果から，球面 S の方程式は

$$x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$$

直線 OC 上の点 T が球面 S 上にもあるとき

$$(2t)^2+(2t-4)^2+(-t-5)^2=81$$

整理すると，$9t^2-6t-40=0$ であり，$t=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{3}$

ここで，$t_1=\dfrac{1-\sqrt{41}}{3}$，$t_2=\dfrac{1+\sqrt{41}}{3}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OT_1}}=t_1\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT_2}}=t_2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で与えられる点 $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ が直線 OC と S の 2 交点ということになる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{T_1T_2}}&=\overrightarrow{\mathrm{OT_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OT_1}}\\&=(t_2-t_1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(t_2-t_1)\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{T_1T_2}}\right|&=|t_2-t_1|\cdot\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\\&=\frac{2\sqrt{41}}{3}\cdot 3\\&=2\sqrt{41}\ \cdots【答】\end{aligned}$$

【戦略 2】(2) について

平面の方程式に習熟していれば，A，B，C を通る平面の方程式を求め，その法線ベクトルを考えて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を出すこともできるでしょう。

【解 2】(2) について

平面 α の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とする。

これが 3 点 A$(4,2,1)$，B$(1,-4,1)$，C$(2,2,-1)$ を通るので

$$\begin{cases}4a+2b+c+d=0 & \cdots①\\ a-4b+c+d=0 & \cdots②\\ 2a+2b-c+d=0 & \cdots③\end{cases}$$

①−② より，$3a+6b=0$ で，$b=-\dfrac{1}{2}a$

①−③ より，$2a+2c=0$ で，$c=-a$

② にこれらを代入すると，$a+2a-a+d=0$ で，$d=-2a$

よって，平面 α の方程式は

$$ax-\frac{a}{2}y-az-2a=0\ \cdots(☆)$$

$a=0$ だと，(☆) は $0\cdot x-0\cdot y-0\cdot z=0$ であり，これを満たす (x,y,z) は空間内の点全てであり，平面を表さない。

よって，$a\neq0$ であり，平面 α の方程式は $x-\dfrac{1}{2}y-z-2=0$

すなわち $2x-y-2z-4=0$

α の法線ベクトル $\vec{n}$ の 1 つとして $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ が取れる

$\vec{n}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}$ は $\vec{e}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

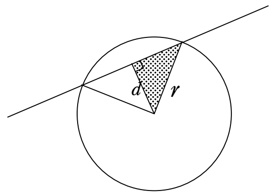
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\parallel\vec{n}$ であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=6$ であるため，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\pm6\vec{e}=\pm2\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\pm2\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\-3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$

P の z 座標が正という条件から，P$(0,4,5)$ $\cdots$【答】

【戦略 3】(3) について

円の弦を求める際に

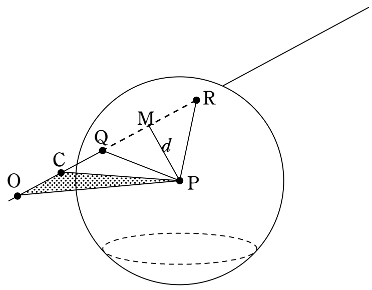


という直角三角形に注目して捌くのも常套手段の 1 つであり，本問は球ですがその応用も考えられます。

ただ，平面の場合では d に相当する部分が点と直線の距離公式で求まりますが，今回は 3 次元ということでそういうわけにはいきません。

今回は面積比較で d を「高さ」と捉えて導出します。

【解 3】(3) について



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{41}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\cdot2+4\cdot2+5\cdot(-1)=3$

これより，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OCP}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot41-9}\\&=3\sqrt{10}\end{aligned}$$

一方，直線 OC と球面 S の交点を Q，R とし，線分 QR の中点を M とする。

$\mathrm{PM}=d$ とすると，$\triangle\mathrm{OCP}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OC}\cdot d=\dfrac{3}{2}d$

ゆえに，$\dfrac{3}{2}d=3\sqrt{10}$ であり，$d=2\sqrt{10}$

求めるのは線分 QR の長さであり

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=2\,\mathrm{RM}\\&=2\sqrt{\mathrm{PR}^2-d^2}\\&=2\sqrt{81-40}\\&=2\sqrt{41}\ \cdots\text{【答】}\end{aligned}$$

【総括】

標準的な空間ベクトルの問題であり，問われていることもよくある定番の内容です。

律儀に x 軸，y 軸，z 軸をかいてやろうとすると見にくくなりますので，解答のように，必要な情報を抽出した絵をかくことが大切です。

(3) では空間座標における直線の扱いが求められます。

xy 平面の直線は $ax+by+c=0$ という直交座標表示を用いて直線を立式できますが，空間座標の直線は，ベクトル方程式で捌くことになります。

一方で球面 S は $x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$ という直交座標表示で表されています。

言ってみれば，$\begin{cases}\text{ベクトル方程式}\\\text{直交座標表示}\end{cases}$ という 2 つを連立するわけです。

本問は今年のセットでは唯一完答を無理のない範囲で狙える一問であり，死守したい問題です。