複素数平面上における図形 C_1，C_2，$\cdots$，C_n，$\cdots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。ただし，i は虚数単位とする。

(A)　C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(B)　自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w=z+1+i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

(1)　すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ。

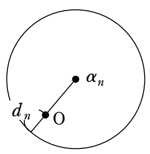
(2)　C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする。このとき，d_n を求めよ。また，$\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ。

＜ ’23 北海道大 ＞

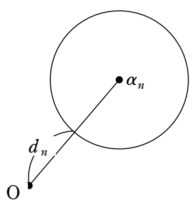
【戦略】

(1)　**帰納的に定まっていく図形ということで，証明の手立ても数学的帰納法を睨むのが自然です。**

(2)



なのか



なのかで，d_n を与える式が異なってきます。

そのため，α_n と O の位置関係を掴む必要があります。

そうなってくると，$|\alpha_n|$ と r_n の大小を比べる必要が出てきますから $|\alpha_n|-r_n$ を計算して整理していけばよいでしょう。

【解答】

(1)　C_n が円を表す $\cdots(*)$ ということを n についての数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のときは条件 (A) より $(*)$ は正しい。

[2]　$n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

C_k が中心 α_k，半径 r_k の円を表すと仮定する

このとき，$|z-\alpha_k|=r_k$ を満たす z の集合が C_k である。

$2w=z+1+i$ より，$z=2w-1-i$ であり，z が C_k 上の点であるため，

$$|2w-\alpha_k-1-i|=r_k$$

すなわち，$\left|w-\dfrac{\alpha_k+1+i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}r_k$

これを満たす点 w の集合が表す図形が C_{k+1} であり，C_{k+1} は中心が点 $\dfrac{\alpha_k+1+i}{2}$，半径が $\dfrac{1}{2}r_k$ の円を表し，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

[1]，[2] から，$n=1,2,\cdots$ に対して $(*)$ は正しいことが示され，C_n は円であることが示された。

また，[2] の途中経過から，円 C_n の中心 α_n，半径 r_n に対して，円 C_{n+1} の中心は $\dfrac{\alpha_n+1+i}{2}$，半径は $\dfrac{1}{2}r_n$

すなわち，$\begin{cases} \alpha_{n+1}=\dfrac{1}{2}\alpha_n+\dfrac{1+i}{2} & \cdots① \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n & \cdots② \end{cases}$

① より，$\alpha_{n+1}-(1+i)=\dfrac{1}{2}\{\alpha_n-(1+i)\}$

よって，$\alpha_n-(1+i)=\{\alpha_1-(1+i)\}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
$\qquad\qquad\qquad =-(1+i)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

これより，$\alpha_n=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ $\cdots$【答】

また，② より，$r_n=r_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ $\cdots$【答】

(2) $|\alpha_n|-r_n=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdot\sqrt{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

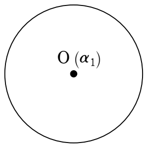
$$=\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\{2^{n-1}-(\sqrt{2}+1)\}}{2^{n-1}}$$

$n=1$，2 のとき，$2^{n-1}<\sqrt{2}+1$ ，$n\geqq 3$ のとき，$2^{n-1}>\sqrt{2}+1$
であることを考えると

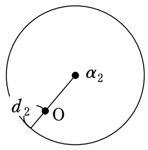
$$\begin{cases}|\alpha_n|<r_n & (n=1,\ 2 \text{ のとき})\\ |\alpha_n|>r_n & (n\geqq 3 \text{ のとき})\end{cases}$$

[1] $n=1$ のとき $\alpha_1=0$ であるため，$d_1=r_1=2$



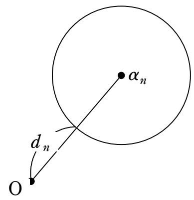
[2] $n=2$ のとき

$$\begin{aligned}d_2&=r_2-|\alpha_2|\\&=-\frac{\sqrt{2}\,\{2^{2-1}-(\sqrt{2}+1)\}}{2^{2-1}}\\&=-\frac{\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2}-1)}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}\end{aligned}$$



[3] $n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}d_n&=|\alpha_n|-r_n\\&=\frac{\sqrt{2}\,\{2^{n-1}-(\sqrt{2}+1)\}}{2^{n-1}}\\&=\sqrt{2}\left\{1-\frac{\sqrt{2}+1}{2^{n-1}}\right\}\end{aligned}$$



[1], [2], [3] より，$d_n=\begin{cases}2\\ \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{2}\\ \sqrt{2}\left\{1-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2^{n-1}}\right\}\end{cases}$ …【答】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left\{1-\frac{\sqrt{2}+1}{2^{n-1}}\right\}=\sqrt{2}$ …【答】

【総括】

見慣れない設定に思えた受験生も多かったと思われます。

試しに C_1 から C_2 を作ってみると，どういった要領でこの図形列が定まっていくかが掴みやすいでしょう。

実験して様子を掴むことは大切です。

なお，$w=\frac{1}{2}z+\frac{1+i}{2}$ で定まる点 w は，点 z の縮小＆平行移動によって得られる点です。

C_1，C_2，… が得られていく様子がイメージできると，中心 α_n は $y=x$ 上に乗りながら，点 $1+i$（座標的には $(1,1)$）に近づいていき，半径もどんどん半分になっていくイメージが掴めるでしょうか。

最終的には C_n はほとんど点 $1+i$ とみなせる極小の円で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}d_n=\sqrt{2}$ という結果は納得でしょう。