

p を 3 以上の素数とする。また、 θ を実数とする。

- (1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ。
 (2) $\cos \theta = \frac{1}{p}$ のとき、 $\theta = \frac{m}{n} \cdot \pi$ となるような正の整数 m, n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ。

< '23 京大 >

【戦略】

- (1) 丁寧に加法定理でバラしていけばよいでしょう。

わざわざ問になっているので、3 倍角の公式は前面に押し出さない方がよさそうです。

さすがに 2 倍角の公式についてはそのまま使ってもよいでしょう。

- (2) おそらく存在しないであろうことが予想されますので、背理法を用いて証明することを考えます。

もし、 $\cos \theta = \frac{1}{p}$ を満たす θ に対して、 $\theta = \frac{m}{n} \pi$ となる正の整数 m, n が存在すると仮定すると、 $n\theta = m\pi$ なので、 $\cos n\theta = \cos m\pi$ すなわち

$$\cos n\theta = (-1)^m$$

ということが言えます。

$\cos n\theta$ を $\cos \theta \left(= \frac{1}{p} \right)$ と結びつけるためには言わば n 倍角に関する式が必要なのですが、一般に

$$\begin{aligned} \cos 1\theta &= \cos \theta \\ \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 3\theta &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ \cos 4\theta &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

というように、 $\cos n\theta$ は整数係数の n 次多項式 $f_n(x)$ に対して

$$f_n(\cos \theta)$$

という形で表せます。

さらに、この最高次の係数は 2^{n-1} ということであり、

$$f_n(\cos \theta) = 2^{n-1} \cos^n \theta + a_{n-1} \cos^{n-1} \theta + \dots + a_1 \cos \theta + a_0$$

と表せ、これを認めれば、 $\cos \theta = \frac{1}{p}$ と併せて

$$\frac{2^{n-1}}{p^n} + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{p} + a_0 = (-1)^m$$

となり、 p^{n-1} を両辺かけることで

$$\frac{2^{n-1}}{p} = (\text{整数})$$

という結果を得て、 p が 3 以上の素数であることから矛盾します。

解答では、 $f_n(x)$ の存在について証明を交えて記述します。

元になるのは、 $\cos(k+2)\theta + \cos k\theta = 2\cos(k+1)\theta \cos \theta$ という和積公式であり、このような $f_n(x)$ が

$$f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x)$$

という漸化式によって定まっていくことを利用して数学的帰納法で示していきます。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta \sin \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta(1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \quad \dots \text{【答】} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= \cos(2 \cdot 2\theta) \\ &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1 \quad \dots \text{【答】} \end{aligned}$$

- (2) $\cos \theta = \frac{1}{p}$ のとき、 $\theta = \frac{m}{n} \pi$ となる正の整数 m, n が存在すると仮定する。

このとき、 $n\theta = m\pi$ で、 $\cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^m \dots (*)$

ここで、 $f_n(x)$ を

$$f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x), \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2x^2 - 1$$

によって定めたとき、 $f_n(x)$ が以下の性質 (☆) を満たすことを正の整数 n についての数学的帰納法で示す。

$$(\star) \quad \begin{cases} f_n(x) \text{ は } n \text{ 次の整式} \\ f_n(x) \text{ の各項の係数は全て整数} \\ f_n(x) \text{ の最高次の係数は } 2^{n-1} \\ \cos n\theta = f_n(\cos \theta) \end{cases}$$

- [1] $n=1, 2$ のとき

$f_1(x) = x$ は 1 次で、係数は整数で、最高次の係数は 2^{1-1}

また、 $\cos 1\theta = f_1(\cos \theta)$

ゆえに、 $n=1$ のとき、 $f_1(x)$ は (☆) を満たす。

また、 $f_2(x) = 2x^2 - 1$ は 2 次式で、係数は全て整数で、最高次の係数は 2^{2-1}

$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ なので、 $\cos 2\theta = f_2(\cos \theta)$

ゆえに、 $n=2$ のとき、 $f_2(x)$ は (☆) を満たす。

- [2] $n=k, k+1$ ($k=1, 2, \dots$) のとき

$f_k(x), f_{k+1}(x)$ が (☆) を満たしていると仮定する。

このとき、

$$\begin{aligned} f_{k+2}(x) &= 2xf_{k+1}(x) - f_k(x) \\ &= 2x(2^k x^{k+1} + g_1(x)) - (2^{k-1} x^k + g_2(x)) \\ &= 2^{k+1} x^{k+2} + g_3(x) \end{aligned}$$

ただし、

$g_1(x)$ は高々 k 次の整数係数多項式
 $g_2(x)$ は高々 $k-1$ 次の整数係数多項式
 $g_3(x)$ は高々 $k+1$ 次の整数係数多項式

また、和積公式から

$$\cos(k+2)\theta + \cos k\theta = 2 \cos(k+1)\theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \cos(k+2)\theta &= 2 \cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos k\theta \\ &= 2 \cos \theta f_{k+1}(\cos \theta) - f_k(\cos \theta) \end{aligned}$$

一方、 $f_{k+2}(x) = 2x f_{k+1}(x) - f_k(x)$ という関係式から

$$f_{k+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta f_{k+1}(\cos \theta) - f_k(\cos \theta)$$

以上から、

$$\begin{cases} f_{k+2}(x) \text{ は } k+2 \text{ 次の整式} \\ f_{k+2}(x) \text{ の各項の係数は全て整数} \\ f_{k+2}(x) \text{ の最高次の係数は } 2^{n-1} \\ \cos(k+2)\theta = f_{k+2}(\cos \theta) \end{cases}$$

であり、 $n = k+2$ のときも (☆) は成立する。

以上 [1], [2] より、 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ を満たす最高次数 2^{n-1} の n 次の整数係数多項式 $f_n(x)$ が存在することが示された。

この $f_n(x)$ は、 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} を整数として

$$f_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

とおくことができる。

(*) より、 $\cos n\theta = (-1)^m$ であること、及び、 $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ を満たすことから

$$2^{n-1} \cos^n \theta + a_{n-1} \cos^{n-1} \theta + \dots + a_1 \cos \theta + a_0 = (-1)^m$$

$\cos \theta = \frac{1}{p}$ であることから

$$\frac{2^{n-1}}{p^n} + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{p} + a_0 = (-1)^m$$

$$\text{これより、} \frac{2^{n-1}}{p^n} = (-1)^m - \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} - \dots - \frac{a_1}{p} - a_0$$

両辺 p^{n-1} をかけると、 $\frac{2^{n-1}}{p} = (\text{整数})$ という結果を得る。

しかし、 p は 3 以上の素数であり、 $n = 1, 2, \dots$ に対して $\frac{2^{n-1}}{p}$ が整数となることはなく、矛盾する。

以上から、 $\cos \theta = \frac{1}{p}$ を満たす θ に対して、 $\theta = \frac{m}{n}\pi$ となる正の整数 m, n は存在しない。

【総括】

(1) は単なる確認計算の位置づけであるため、計算ミスにだけ気を付けて丁寧に確保したいところです。

(2) の $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ となる $f_n(x)$ は (第 1 種) チェビシエフの多項式と呼ばれ、有名なネタです。

$f_n(x)$ が

- ・ n 次式であること
- ・ 最高次の係数が 2^{n-1} であること
- ・ 整数係数であること

などは、チェビシエフの多項式の有名性質ですが、初見だと気に留められないでしょうし、それを (1) だけから気づけというのは初見の人からすれば酷な話です。

(要するに (1) はヒントとして機能していないのではないかと思います。)

性質はもちろん、性質の導出過程も経験がモノをいう処理が必要なので、知識的側面が強い問題であることは否めません。