　O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている。

(a)　点 P は x 軸上にある。
(b)　点 Q は yz 平面上にある。
(c)　線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

　点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。

＜ ’23 京都大 ＞

【戦略】

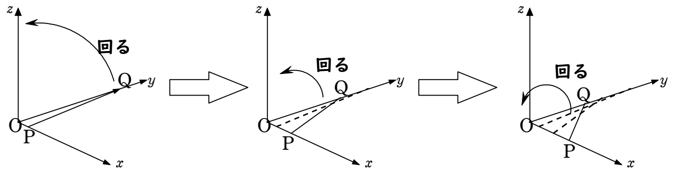
いきなり P，Q を動かそうとすると混乱しますから，どちらかを固定してどちらか一方を動かします。

P をどこかに固定してみると，OQ＝一定値 ということになるため，Q は yz 平面で回転運動をすることになります。

このとき，線分 PQ の通過領域は円錐の側面ということになります。

このことを皮切りに，題意の立体は x 軸回転体であることを看破したいところです。

つまり，イメージとしては



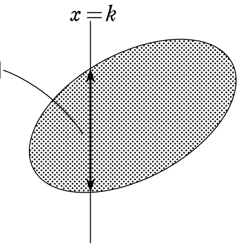
というようなイメージで，結局は線分 PQ の通過領域を x 軸について回転させたものを考えればよいことを看破したいわけです。

対称性を考えれば，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分の通過領域を x 軸周りに回転させたものを後から 2 倍すればよいでしょう。

PQ の式は x 切片，y 切片が手元にあることから $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{1-p}=1$ の形で立式すれば，$y=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x-p+1$ と得られます。
(一旦 $0<p<1$ で考えざるを得ませんが，$p=0$，1 のときは後から個別に検証すればよいでしょう。)

p を $0<p<1$ で動かした際の直線 $y=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x-p+1$ の通過領域を考えるにあたっては，$x=k$ と固定した際に y がどこからどこまで動くのかということを考えます。

イメージとしては右の図のようなイメージで，
各々の k に対して
～～から～～まで
ということが分かれば，下の境界と上の境界が得られるという考え方です。

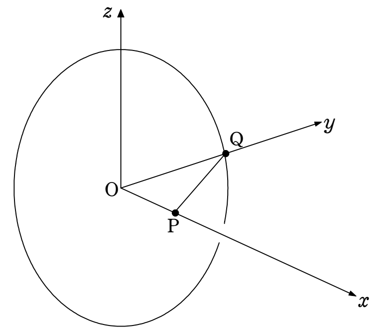


今回は「線分」 PQ の通過領域なので，一旦「直線」 PQ として考えて適宜直感的に処理してしまいます。

【解答】

P$(p,\ 0,\ 0)$ として，まずは $0 \leqq p \leqq 1$ として p を固定する。

このとき，OQ$=1-p$ であり，Q は yz 平面で原点中心，半径 $1-p$ の円上を動き得る。



したがって，題意の立体を K としたとき，K は

$z=0$ (xy 平面) 上における線分 PQ の通過領域 D の x 軸回転体である。

直線 PQ の方程式は $0<p<1$ のとき

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{1-p}=1\text{，すなわち } y=\left(1-\frac{1}{p}\right)x-p+1$$

p が $0<p<1$ で変化するとき，線分 PQ の通過領域を考える。

$x=k$ $(0<k<1)$ と x の値を固定したとき，$y=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)k-p+1$ のとり得る値の範囲を考える。

$$\frac{dy}{dp}=\frac{k}{p^2}-1=\frac{k-p^2}{p^2}$$

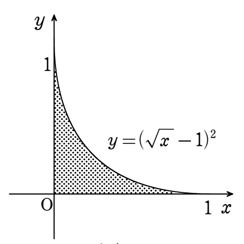
p	(0)	$\cdots$	$\sqrt{k}$	$\cdots$	(1)
$\dfrac{dy}{dp}$		$+$	0	$-$	
y	$(-\infty)$	↗	$k-2\sqrt{k}+1$	↘	(0)

線分 PQ の通過領域は $y>0$ の範囲に存在することに注意すると，
x 座標を k と固定した際に y がとり得る値の範囲は

$$0<y \leqq (\sqrt{k}-1)^2$$

$p=0$ のときの線分 PQ は $x=0$ $(0 \leqq y \leqq 1)$
$p=1$ のときの線分 PQ は $y=0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

であることも踏まえると，D のうち，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分は (図 1) の打点部 (境界線を含む)



(図 1)

題意の立体 K の体積を V とすると，対称性から

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{2} &= \int_0^1 \pi y^2\,dx \\
&= \pi\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^4 dx \\
&= \pi\int_0^1 \left(x^2-4x^{\frac{3}{2}}+6x-4x^{\frac{1}{2}}+1\right) dx \quad (\because\ \text{二項定理}) \\
&= \pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+3x^2-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1 \\
&= \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{5}+3-\frac{8}{3}+1\right) \\
&= \frac{1}{15}\pi
\end{aligned}
$$

ゆえに，求める体積 V は $V=\dfrac{2}{15}\pi$ …【答】

【総括】

今回の立体が x 軸回転体であるということを看破できるかが山場でしょう。

本問は

問題文で回転体とは書いていないけど実は回転体である

というタイプで，一皮むかないと方向性が見えません。

一皮むいた後も線分の通過領域という上級トピックスが待ち構えており，

完答するためには確かな力が必要です。