次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1} \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

ただし，$e$ は自然対数の底であり，その値は $e=2.71\cdots$ である。

＜ '23 京都大 ＞

**【戦略】**

**ひとまず $-1\leqq x\leqq 1$ という対称的な範囲を考えるにあたっては偶関数か奇関数かをチェックしたいところです。**

**今回の $f(x)$ は $f(-x)=f(x)$ が成り立つため，偶関数であると分かりますから，区間の右半分 $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で考えれば十分です。**

**今回は $f(x)$ という記号よりも $y$ などという文字の方が記述上気持ち悪さを拭える人の方が多いため，**

$$y=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}$$

**という記号を用いて考えていくことにします。**

**ひとまず，$t=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$ とおきたくなるでしょう。**

**これにより，$y=t+\frac{1}{t}$ というシンプルな形となります。**

**もちろん，この $t$ は好き勝手動けません。**

**$x$ が $0\leqq x\leqq 1$ までしか動けませんから，$t=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$ で与えられる $t$ も制限を受けます。**

**そこで，まずは $\frac{dt}{dx}$ を調べ，$t$ のとり得る範囲を調べ，その範囲内で $y=t+\frac{1}{t}$ の最大最小を調べるわけです。**

**今回は，$\frac{dt}{dx}=-2x\,e^{-x^2}+\frac{1}{2}x=\frac{x}{2e^{x^2}}\left(e^{x^2}-4\right)$ となり，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲では $e^{x^2}-4$ が符号を司っています。**

**$0\leqq x\leqq 1$ の範囲では，$e^{x^2}-4\leqq e^1-4<0$ ですから，$\frac{dt}{dx}<0$ となり $t$ は $x$ についての単調減少関数だと分かりますので，**

$$\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\leqq t\leqq 2$$

**と言えます。**

**次に，$y=t+\frac{1}{t}$ $\left(\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\leqq t\leqq 2\right)$ について考えるわけですが，ひとまず $t>0$ の範囲で全体像を掴んで，その中で今回の範囲はどこだ？という頭の流れの方がスムーズにいきます。**

**$t=1$ で極小値をとるため，今回の範囲においては単調増加だと分かり，解決します。**

【解答】

$f(-x)=f(x)$ であり，$f(x)$ は偶関数であるため，$0\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値を考えれば十分である。

$t=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とおく。

$$\frac{dt}{dx}=-2x\,e^{-x^2}+\frac{1}{2}x$$
$$=\frac{x}{2e^{x^2}}\left(e^{x^2}-4\right)$$

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲では，$e^{x^2}-4\leqq e^1-4<0$

よって，$t$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で単調減少。

したがって，$\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\leqq t\leqq 2$

さて，$y=f(x)$ に対して，$y=t+\frac{1}{t}$ $\left(\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\leqq t\leqq 2\right)$ であり，

$g(t)=t+\frac{1}{t}$ とおくと，

$$g'(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{(t+1)(t-1)}{t^2}$$

一旦，$t>0$ の範囲で増減表を書くと

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(t)$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

であり，$t\geqq 1$ の範囲では，$g(t)$ は単調増加であることが分かる。

今，$\frac{1}{e}+\frac{5}{4}>1$ であるため，$\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\leqq t\leqq 2$ の範囲では $g(t)$ は単調増加。

$$g\left(\frac{1}{e}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{e}+\frac{5}{4}+\frac{1}{\frac{1}{e}+\frac{5}{4}}=\frac{5e+4}{4e}+\frac{4e}{5e+4}$$

$$g(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

よって，$y\,(=f(x))$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値について

$$\begin{cases}\text{最大値は}\ \frac{5}{2}\\ \text{最小値は}\ \frac{5e+4}{4e}+\frac{4e}{5e+4}\end{cases}\quad\cdots\text{【答】}$$

【総括】

$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\dfrac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}$ は

$$h(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1\ ,\ g(x)=x+\frac{1}{x}$$

とした際に，

$$f(x)=g(h(x))$$

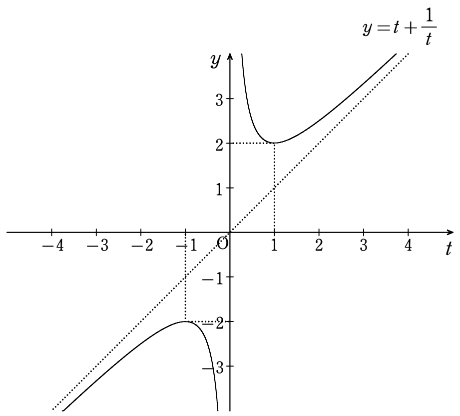
という形になっている「合成関数」です。

置き換えてシンプルな形にするわけですが，置き換えた際に新たな主役の文字 ( 解答でいう $t$ ) の範囲を忘れないようにしましょう。
( 京大受験生には釈迦に説法でしょう。 )

やること自体は一本道で，京大受験生であれば方針面で困るようなことがあってはなりません。
( さすがに置き換えずに処理しようとする人はいないでしょう。 )

怖いのは計算ミスだけなので，緊張した試験場で焦らずに捌けたかどうかが差を生むでしょう。

なお，$y=t+\dfrac{1}{t}$ のグラフの概形が




ということは常識になっていてほしいところです。