サイコロをくり返し n 回振って，出た目の数を掛け合わせた積を X とする。

すなわち，k 回目に出た目の数を Y_k とすると，$X=Y_1Y_2\cdots Y_n$

(1)　X が3で割り切れる確率 p_n を求めよ。

(2)　X が6で割り切れる確率 q_n を求めよ。

(3)　X が4で割り切れる確率 r_n を求めよ。

＜ '92 京都大 文理共通 ＞

【解答】

(1)　X が3で割り切れるという事象を A とする。

A の余事象 $\overline{A}$ について，$\overline{A}$ とは

n 回中，1回も3，6の目が出ない

という事象であり，その確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A})=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

求める確率 p_n は，$p_n=P(A)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ …【答】

(2)　X が2で割り切れるという事象を B とする。

B の余事象 $\overline{B}$ について，$\overline{B}$ とは

n 回中，1回も2，4，6の目が出ない

という事象であり，その確率 $P(\overline{B})$ は

$$P(\overline{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

また，事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，

n 回中，1回も2，3，4，6の目が出ない

という事象であり，その確率 $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

求める確率 q_n は事象 $A\cap B$ が起こる確率 $P(A\cap B)$ であり，

$$\begin{aligned}q_n&=P(A\cap B)\\&=1-P(\overline{A\cap B})\\&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\ (\because\ \text{ド・モルガンの法則})\\&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}\\&=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\ \cdots【答】\end{aligned}$$

(3)　X が4で割り切れないとき

[1]　n 回とも1，3，5のいずれかの目が出る

[2]　n 回中，$\begin{cases}2\text{ が }1\text{ 回}\\1,\ 3,\ 5\text{ が }n-1\text{ 回}\end{cases}$ 出る

[3]　n 回中，$\begin{cases}6\text{ が }1\text{ 回}\\1,\ 3,\ 5\text{ が }n-1\text{ 回}\end{cases}$ 出る

のいずれかが起こる。

[1]の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

[2]の確率は ${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

[3]の確率は ${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって，
$$\begin{aligned}1-r_n&=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに，$r_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …【答】