n を自然数とする。1個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を Y とする。
(1) Y が5で割り切れる確率を求めよ。
(2) Y が15で割り切れる確率を求めよ。

＜ '23 京都大 ＞

【戦略】

(2) を睨むと，Y が 15 で割り切れるというのは

Y が 5 で割り切れる かつ Y が 3 で割り切れる

ということで，(1) は (2) を解決するための部分的なパーツであることが考えられます。

そこで，

Y が 5 で割り切れるという事象を A
Y が 3 で割り切れるという事象を B

と設定します。

(1) **Y が 5 で割り切れるというのは**

n 回のうち，少なくとも 1 回 5 の目が出る

ということですから，直接的に考えるよりも余事象を考えることになります。

(2) **割り切れない（1回も○の目が出ない）という形の方が扱いやすいのは (1) からも分かるでしょうから，引き続き余事象を考えていきます。**

求める確率は $P(A\cap B)$ ですが

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})\\
&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\ (\because\ \textbf{ド・モルガンの法則})\\
&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}
\end{aligned}
$$

ですから，$P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ を求めれば勝ちです。

【解答】

(1) Y が 5 で割り切れるという事象を A とする。

A の余事象 $\overline{A}$ について，$\overline{A}$ とは

n 回中，1回も 5 が出ない

という事象であり，その確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

求める確率 $P(A)$ は，$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ …【答】

(2) Y が 3 で割り切れるという事象を B とする。

B の余事象 $\overline{B}$ について，$\overline{B}$ とは

n 回中，1回も 3，6 の目が出ない

という事象であり，その確率 $P(\overline{B})$ は

$$P(\overline{B})=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

また，事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，

n 回中，1回も 3，5，6 の目が出ない

という事象であり，その確率 $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

求める確率は事象 $A\cap B$ が起こる確率 $P(A\cap B)$ であり，

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})\\
&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\ (\because\ \text{ド・モルガンの法則})\\
&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}\\
&=1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\
&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\ \cdots\text{【答】}
\end{aligned}
$$

【総括】

サイコロの目の積が○で割り切れる確率という典型的な話題であり，京大受験生であれば類題経験があって然るべきでしょう。

なお，京大は1992年にこの話題を出題しています。

サイコロをくり返し n 回振って，出た目の数を掛け合わせた積を X とする。
すなわち，k 回目に出た目の数を Y_k とすると，$X=Y_1Y_2\cdots Y_n$
(1) X が 3 で割り切れる確率 p_n を求めよ。
(2) X が 6 で割り切れる確率 q_n を求めよ。
(3) X が 4 で割り切れる確率 r_n を求めよ。

＜ '92 京都大 文理共通 ＞