空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。点 D，P，Q を次のように定める。点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し，点 Q は線分 OB の中点である。

さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点をもつように定める。

このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ。

＜ '23 京都大 ＞

【戦略】

1 つの始点，3 つの基底

という空間ベクトルの基本に従います。

今回の主役のベクトル (基底) は素直に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすればよいでしょう。($\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくことにします。)

ひとまず，固定されている具体的な登場人物 D，P，Q について，始点を O にとった $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，これらの点の定め方から

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

となります。

次に R についてですが，R が直線 OD 上なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおきます。

気持ちの上では，t が求まれば，OR : RD が求まるということを身構えておきます。

これにより，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\vec{a}+2t\vec{b}+3t\vec{c}$ ということが言えます。

あと，直線 QR と直線 PC が交点をもつということをどのように捌くかですが，交点を T としたとき

$$\begin{cases} \text{T は直線 QR 上} \\ \text{T は直線 PC 上} \end{cases}$$

というある意味当たり前的な発想で捌いていきます。

これは，$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OR}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OP}} \end{cases}$ と翻訳でき，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ が 2 通りで表せることになります。

もちろん，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表し，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立 ($\vec{0}$ でなく互いに平行でない) であることから，係数を比較すれば解決します。

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

直線 OD 上の点 R は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表せる。

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\vec{a}+2t\vec{b}+3t\vec{c}$

直線 QR と直線 PC が交点をもつときを考えるので，その交点を T とする。

このとき，T は直線 QR 上にあるため，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}&=(1-\alpha)\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=\frac{1-\alpha}{2}\vec{b}+t\alpha\vec{a}+2t\alpha\vec{b}+3t\alpha\vec{c}\\&=t\alpha\vec{a}+\left(2t\alpha+\frac{1-\alpha}{2}\right)\vec{b}+3t\alpha\vec{c}\ \cdots ①\end{aligned}$$

と表せる。

一方，T は直線 PC 上にあるため，実数 β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}&=(1-\beta)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\frac{\beta}{3}\vec{a}+(1-\beta)\vec{c}\ \cdots ②\end{aligned}$$

と表せる。

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であり，①，② から

$$\begin{cases} t\alpha=\dfrac{\beta}{3} & \cdots ③ \\ 2t\alpha+\dfrac{1-\alpha}{2}=0 & \cdots ④ \\ 3t\alpha=1-\beta & \cdots ⑤ \end{cases}$$

③ より，$\beta=3t\alpha$ であり，⑤ に代入すると，$\beta=1-\beta$

これより，$\beta=\dfrac{1}{2}$ であり，このとき ③ より $t\alpha=\dfrac{1}{6}\cdots$ ⑥

④ に代入し，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1-\alpha}{2}=0$ で，$\alpha=\dfrac{5}{3}$

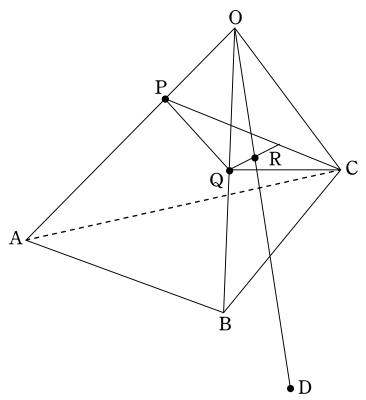
⑥ より，$t=\dfrac{1}{10}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ なので，OR : RD = 1 : 9 …【答】

【総括】

内分点の位置ベクトルの導出，直線のベクトル方程式，交点をもつことの翻訳など，空間ベクトルの基本的な要素が詰まっており，京大受験生としては落とせない一問といってよいでしょう。

無理にお絵描きしなくてもいいですが，ある程度立式の補助のためにお絵描きするのであれば



といった感じになるでしょうか。

問題によってはある程度のお絵描きをして図形的に考察しないとキツイ問題もありますが，本問は式だけでも押し通せる範疇です。