次の各問に答えよ。

問１　定積分 $\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ。

問２　整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

＜ '23 京都大 ＞

【戦略】

問１　与えられた定積分は $2\int_1^4 \sqrt{x}\ \log x\ dx$ です。

$\log x$ が絡んだ積分ということで部分積分で進めます。

部分積分において $\log x$ は $(\quad)'$ の服を着たがりませんから

$2\int_1^4 \left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'\log x\ dx$ **と見ます。**

問２　$x^{2023}-1=(x-1)(x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^4+x^3+x^2+x+1)$ **なのですが**
$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ **とおくと**

$$x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$=x^{2018}(x^4+x^3+x^2+x+1)+x^{2013}(x^4+x^3+x^2+x+1)+\cdots$$
$$+x^3(x^4+x^3+x^2+x+1)+x^2+x+1$$

$$=f(x)Q_1(x)+x^2+x+1\ \ (Q_1(x)\text{ は整式})$$

と５個おきに $f(x)$ で括れるため，

$$\begin{aligned}x^{2023}-1&=(x-1)\{f(x)Q_1(x)+x^2+x+1\}\\&=f(x)Q_2(x)+(x-1)(x^2+x+1)\ \ (Q_2(x)\text{ は整式})\\&=f(x)Q_2(x)+x^3-1\end{aligned}$$

というように，$f(x)$ で割った余りが直接的に x^3-1 と求まります。

【解答】

問１　与えられた定積分は

$$\begin{aligned}2\int_1^4\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'\log x\ dx&=2\left\{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^4-\int_1^4\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}\\&=\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^4-\frac{4}{3}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx\\&=\frac{4}{3}\cdot4\sqrt{4}\cdot\log4-\frac{4}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4\\&=\frac{32}{3}\log4-\frac{8}{9}(4\sqrt{4}-1)\\&=\frac{64}{3}\log2-\frac{56}{9}\ \cdots【答】\end{aligned}$$

問２　$x^{2023}-1=(x-1)(x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^4+x^3+x^2+x+1)$

ここで，$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ とおくと

$$x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^4+x^3+x^2+x+1$$
$$=x^{2018}(x^4+x^3+x^2+x+1)+x^{2013}(x^4+x^3+x^2+x+1)+\cdots$$
$$+x^3(x^4+x^3+x^2+x+1)+x^2+x+1$$

$$=f(x)Q_1(x)+x^2+x+1\ \ (Q_1(x)\text{ は整式})$$

よって，

$$\begin{aligned}x^{2023}-1&=(x-1)\{f(x)Q_1(x)+x^2+x+1\}\\&=f(x)Q_2(x)+(x-1)(x^2+x+1)\ \ (Q_2(x)\text{ は整式})\\&=f(x)Q_2(x)+x^3-1\end{aligned}$$

と表せるため，$x^{2023}-1$ を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割った余りは
x^3-1 …【答】

【戦略 2】問 2 について

$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ **とおくと，**

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

ですから，

$$x^5=(x-1)f(x)+1$$

となり，合同式でいうところの $x^5\equiv 1 \pmod{f(x)}$ **ということになるため**

$$x^{2023}-1=x^3\cdot(x^5)^{404}-1\equiv x^3-1 \pmod{f(x)}$$

ですので， $x^{2023}-1$ **を** $f(x)$ **で割った余りは** x^3-1 **ということになります。**

解答では整式に関する合同式は前面に押し出さないで，本質的に同じことを記述でまとめていきます。

【解 2】問 2 について

$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ とすると，$x^5-1=(x-1)f(x)$ より

$$x^5=(x-1)f(x)+1 \quad \cdots ①$$

このとき，

$$\begin{aligned} x^{2023}-1&=(x^5)^{404}\cdot x^3-1 \\ &=x^3\{(x-1)f(x)+1\}^{404}-1 &&(\because ①) \\ &=x^3\{f(x)Q_1(x)+1\}-1 &&(\because \text{二項定理}) \\ &=f(x)Q_2(x)+x^3-1 &&(Q_1(x),\ Q_2(x)\text{は整式}) \end{aligned}$$

と表せるため，求める余りは x^3-1 …【答】

【総括】

京大がしばしば採用する小問集合の形式であり，本問はそれぞれ基本的なレベルです。

問 1 の定積分の計算については，基本的な部分積分の問題ですし，問 2 については煮るなり焼くなりできます。

ただし，求める余りを ax^3+bx^2+cx+d などとおき，

$$x^{2023}-1=(x^4+x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$$

という式を立てて，$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ となる解 α_1，α_2，α_3，α_4 を代入していく路線については回り道となります。

$${\alpha_k}^4+{\alpha_k}^3+{\alpha_k}^2+\alpha_k+1=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

なので，

$$(\alpha_k-1)({\alpha_k}^4+{\alpha_k}^3+{\alpha_k}^2+\alpha_k+1)=0$$

すなわち，${\alpha_k}^5-1=0$ となり，$\alpha_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は 1 の 5 乗根です。

例えば，$\alpha_1=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ を代入すると

$${\alpha_1}^{2023}-1=a{\alpha_1}^3+b{\alpha_1}^2+c\alpha_1+d$$

ということになり，

$${\alpha_1}^3-1=a{\alpha_1}^3+b{\alpha_1}^2+c\alpha_1+d$$

となります。

このあと実部虚部に分けて比較するということになりますが，方針面が分かっても処理しきるのは大変です。

ましてやそれを α_2，α_3，α_4 でもやるとなると，面倒でしょう。

そもそも 1 の 5 乗根を考えられる人は【解 2】の路線でいくとおもいます。