xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=t+2\sin^2 t\ ,\ \ y=t+\sin t\quad (0<t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸に平行なものがいくつあるか求めよ。

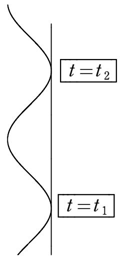
(2) 曲線 C のうち $y\leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

＜ ’23 九州大 ＞

【戦略】

(1) **接線の方向ベクトルが** $\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$ **であるため，** $\dfrac{dx}{dt}=0$ **となる** t **を求めにいくことになります。**

気を付けなければならないのは， t **の個数と接線の本数が一致するとは限らないという点です。**



というような状況が起きていないことを確認しておきましょう。

(2) $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ **を調べ，丁寧に図示していきます。**

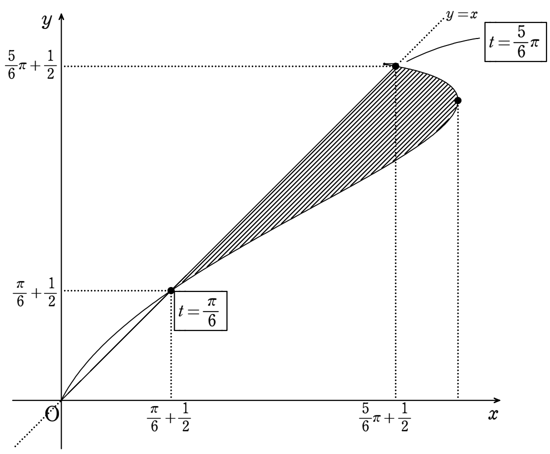
$y\leqq x$ **を満たす** t **の範囲も将来的な置換積分のことを考えると出しておく必要があります。**

$$t+\sin t\leqq t+2\sin^2 t \iff \sin t\,(2\sin t-1)\geqq 0$$

であり， $0\leqq t\leqq\pi$ **の範囲では** $\sin t\geqq 0$ **だから，** $\sin t\geqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq t\leqq\pi$ **の範囲でこれを満たすのは** $\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ **ということになります。**

これを図示すると



というようになります。

x **軸方向の積分だと色々厄介ですが，** y **軸方向の積分であれば，台形を差し引けば解決します。**

【解答】

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1+4\sin t\cos t$ 　　$\dfrac{dy}{dt}=1+\cos t$

$\quad=1+2\sin 2t$

$(t\ ,\ s)$ における接線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$

$0<t<\pi$ において，$\dfrac{dy}{dt}>0$ であるため，C の接線で y 軸に平行となるときの t は $\dfrac{dx}{dt}=0$，すなわち

$$\sin 2t=-\frac{1}{2}$$

となる t である。

$0<t<\pi$ のとき，$0<2t<2\pi$ であるため，$2t=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

すなわち，$t=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{11}{12}\pi$

$$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{11}{12}\pi=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\frac{7}{12}\pi=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2\frac{11}{12}\pi=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

よって，

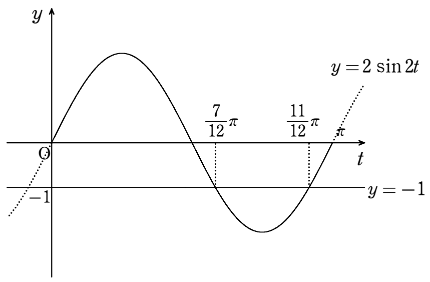
$t=\dfrac{7}{12}\pi$ のときの点は $\left(\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\ ,\ \dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

$t=\dfrac{11}{12}\pi$ のときの点は $\left(\dfrac{11}{12}\pi+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\ ,\ \dfrac{11}{12}\pi+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

となり，これらの点における接線が一致することはない。

よって，求める接線の本数は 2 本である。…【答】

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2\sin 2t-(-1)$ と見て，$y=2\sin 2t$ と $y=-1$ のグラフの上下で $\dfrac{dx}{dt}$ の符号を見る。



また，$\dfrac{dy}{dt}=1+\cos t\geqq 0$

よって，以下の増減表を得る。

t	0	$\cdots$	$\frac{7}{12}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{12}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
x	→	→	·	←	·	→	→
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
y	↑	↑	↑	↑	↑	↑	·
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$	↗	↗	↑	↖	↑	↗	→
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$		Aの座標		Bの座標		$(\pi,\ \pi)$

ただし，

$$\mathrm{A}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{7\pi}{12}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$\mathrm{B}\left(\frac{11}{12}\pi+\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{11}{12}\pi+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

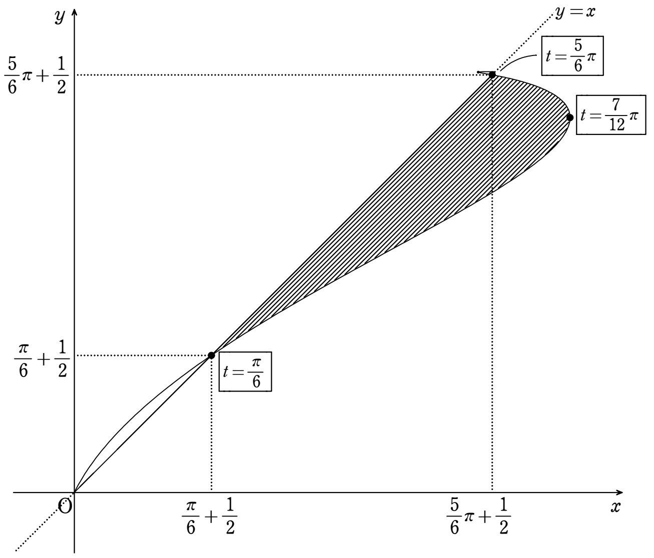
また，$y\leqq x$ を満たす t の範囲を求める。

$$t+\sin t\leqq t+2\sin^2 t \iff \sin t\,(2\sin t-1)\geqq 0$$

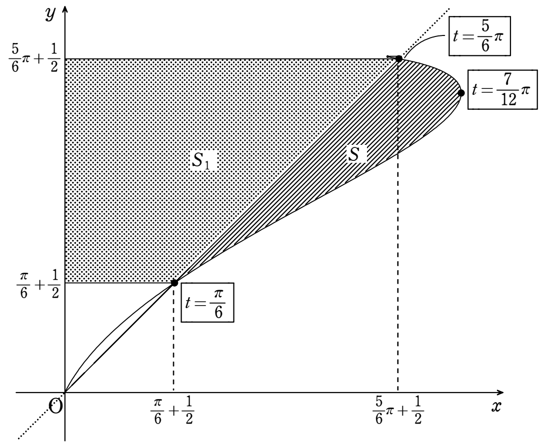
であり，$0\leqq t\leqq \pi$ の範囲では $\sin t\geqq 0$ だから，$\sin t\geqq \dfrac{1}{2}$

$0\leqq t\leqq \pi$ の範囲でこれを満たすのは $\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq \dfrac{5}{6}\pi$

これより，曲線 C の概形，及び $y\leqq x$ を満たす領域は以下の (図 1) のようになる。



(図 1)



(図 2)

求める面積を S とし，(図 2) のように面積 S_1 を定める。

$$\begin{aligned}
S_1&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}(\pi+1)\cdot\frac{2}{3}\pi\\
&=\frac{\pi(\pi+1)}{3}\\
&=\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1+S&=\int_{\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}} x\,dy\\
&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} x\frac{dy}{dt}dt\\
&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(t+2\sin^2 t)(1+\cos t)\,dt\\
&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(t+t\cos t+2\sin^2 t+2\sin^2 t\cos t)\,dt
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int t\cos t\,dt=t\sin t-\int\sin t\,dt=t\sin t+\cos t+C$ (C は積分定数)

$\displaystyle\int\sin^2 t\,dt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$ (C は積分定数)

よって，

$$\begin{aligned}
S_1+S&=\left[\frac{1}{2}t^2+t\sin t+\cos t+t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{2}{3}\sin^3 t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&\quad+\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)\\
&=\frac{\pi^2}{3}+\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\frac{\pi^2}{3}+\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-S_1\\
&=\frac{\pi^2}{3}+\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\\
&=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots【答】
\end{aligned}$$

【総括】

パラメータ表示された曲線に関する面積の問題で，やること自体は決まっています。

ただ，数値がうるさく，不愉快な計算に襲われます。

図示まで辿り着ければ，後は面積計算という名の積分計算に集中することになりますが，y 軸方向の積分計算にスムーズにいけたかどうかが山場でしょう。（これについてはモノの見え方の問題です。）