

2023 年度 九州大学 理系 第4問

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
- (B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
- (C) $f(0) \neq 0$
- (D) $f(x), g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0, g'(0) = 1$

条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1, g(0) = 0$ がわかる。以上のことから

① $f(x), g(x)$ はすべての x の値で微分可能で、 $f'(x) = -g(x), g'(x) = f(x)$ が

② 成立することが示される。上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$

③ であることが実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。

よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに、 a, b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)' $f(x), g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = a, g'(0) = b$

におきかえて、条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x), g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも、条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1, g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと、条件 (A), (B), (C), (D) において、 $f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$

④ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により、 $p(x), q(x)$ がまず求まり、このことを用いると $f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ が得られる。

- (1) 下線部①について, $f(0)=1, g(0)=0$ となることを示せ。
- (2) 下線部②について, $f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり, $f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。
- (3) 下線部③について, 下線部①, 下線部②の事実を用いることにより, $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。
- (4) 下線部④について, 条件 (B), (D) において, $f(x)$ を $p(x)$ に, $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が,
 - (B) すべての x, y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$
 - (D) $p(x), q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0, q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄 , に入る関数を求めよ。

< '23 九州大 >