

2023 年度 九州大学 理系 第4問

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数  $\cos x$ ,  $\sin x$  については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての  $x, y$  について  $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
- (B) すべての  $x, y$  について  $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
- (C)  $f(0) \neq 0$
- (D)  $f(x), g(x)$  は  $x=0$  で微分可能で  $f'(0) = 0, g'(0) = 1$

条件 (A), (B), (C) から  $f(0) = 1, g(0) = 0$  がわかる。以上のことから

①  $f(x), g(x)$  はすべての  $x$  の値で微分可能で、 $f'(x) = -g(x), g'(x) = f(x)$  が

② 成立することが示される。上のことから  $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$

③ であることが実部と虚部を調べることによりわかる。ただし  $i$  は虚数単位である。

よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数  $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$  であることが示される。

さらに、 $a, b$  を実数で  $b \neq 0$  とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)'  $f(x), g(x)$  は  $x=0$  で微分可能で  $f'(0) = a, g'(0) = b$

におきかえて、条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす  $f(x), g(x)$  はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも、条件 (A), (B), (C) から  $f(0) = 1, g(0) = 0$  が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと、条件 (A), (B), (C), (D) において、 $f(x)$  を  $p(x)$  に、 $g(x)$  を  $q(x)$

④ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により、 $p(x), q(x)$  がまず求まり、このことを用いると  $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ ,  $g(x) = \boxed{\text{イ}}$  が得られる。

- (1) 下線部①について、 $f(0)=1$ 、 $g(0)=0$ となることを示せ。
- (2) 下線部②について、 $f(x)$ がすべての $x$ の値で微分可能な関数であり、 $f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。
- (3) 下線部③について、下線部①、下線部②の事実を用いることにより、 $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。
- (4) 下線部④について、条件(B)、(D)において、 $f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が、
  - (B) すべての $x, y$ について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$
  - (D)  $p(x), q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0, q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄  ,  に入る関数を求めよ。

< '23 九州大 >