以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x , y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$
(B) すべての x , y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$
(C) $f(0)\fallingdotseq 0$
(D) $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$, $g'(0)=1$

条件 (A) , (B) , (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ がわかる。①以上のことから $f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で , $f'(x)=-g(x)$, $g'(x)=f(x)$ が成立する②ことが示される。上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ であることが実部と虚部を調べることによりわかる③。ただし i は虚数単位である。

よって条件 (A) , (B) , (C) , (D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに, a , b を実数で $b\fallingdotseq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)′ $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$, $g'(0)=b$

におきかえて , 条件 (A) , (B) , (C) , (D)′ を満たす $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも , 条件 (A) , (B) , (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと , 条件 (A) , (B) , (C) , (D) において , $f(x)$ を $p(x)$ に , $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる④。すると前半の議論により , $p(x)$, $q(x)$ がまず求まり, このことを用いると $f(x)=\boxed{\text{ア}}$, $g(x)=\boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1) 下線部 ① について , $f(0)=1$, $g(0)=0$ となることを示せ。
(2) 下線部 ② について , $f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり, $f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。
(3) 下線部 ③ について , 下線部 ①, 下線部 ② の事実を用いることにより, $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ となることを示せ。
(4) 下線部 ④ について , 条件 (B) , (D) において , $f(x)$ を $p(x)$ に , $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が,

(B) すべての x , y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$
(D) $p(x)$, $q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$, $q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ。

＜ ’23 九州大 ＞

【戦略】

(1) **条件 (A) , (B) において , $x=y=0$ を代入することで ,**

$$\begin{cases} f(0)=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2 \\ g(0)=2f(0)g(0) \end{cases}$$

というように , $f(0)$, $g(0)$ に関する等式を得られます。

$g(0)\fallingdotseq 0$ とすると , $f(0)=\frac{1}{2}$ を得るのですが , このとき $\{g(0)\}^2=-\frac{1}{4}$ となり , $g(x)$ が実数値関数であることに反することになります。

ゆえに , $g(0)=0$ が確定し , $f(0)\fallingdotseq 0$ という条件 (C) から , $f(0)=1$ と解決します。

(2) **$f(x)$ がすべての x の値で微分可能とは , $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ という極限が有限確定することであり , $f(x+h)$ の部分は条件 (A) を用いて捌いていけばよいでしょう。**

(3) **$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ を展開して整理すると**

$$\{f(x)\cos x+g(x)\sin x\}+\{-f(x)\sin x+g(x)\cos x\}i$$

となりますから , 実部を $R(x)$, 虚部を $I(x)$ とおいてやります。

$R'(x)$, $I'(x)$ をそれぞれ計算してやると , $R'(x)=0$, $I'(x)=0$ が得られますから

$$R(x)=C_1,\ I(x)=C_2\ \ (C_1,\ C_2\ \text{は定数})$$

と x の値に依らない定数関数となります。

あとは $R(0)$, $I(0)$ の値を用いて C_1 , C_2 を特定していけばよいことになります。

(4) **$p(x)$, $q(x)$ の形は複雑ですが , やることは一本道です。**

条件 (B) を満たしていることの証明については

$p(x)q(y)+q(x)p(y)=\cdots\cdots\cdots$ と計算していき , $=q(x+y)$

となることを目指せばよいでしょう。

$p(x)$, $q(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示すには

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(h)-p(0)}{h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{q(h)-q(0)}{h}$$

を計算していき , 有限確定値となることを示すことになります。

【解答】

(1)

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y) \quad \cdots(\mathrm{I})$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \quad \cdots(\mathrm{II})$$

(Ⅰ), (Ⅱ) において，$x=0$，$y=0$ とすると

$$\begin{cases} f(0)=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2 & \cdots(\mathrm{III}) \\ g(0)=2f(0)g(0) & \cdots(\mathrm{IV}) \end{cases}$$

$g(0)\neq 0$ と仮定すると，(Ⅳ) より，$f(0)=\dfrac{1}{2}$

(Ⅲ) に代入すると，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}-\{g(0)\}^2$，すなわち $\{g(0)\}^2=-\dfrac{1}{4}$

$g(x)$ は実数値関数なので，$g(0)$ は実数であり，$\{g(0)\}^2\geqq 0$ であるから，矛盾する。

よって，$g(0)=0$ であり，③ より，$f(0)=\{f(0)\}^2$

条件 (C) より，$f(0)\neq 0$ であるから，$f(0)=1$

以上から $f(0)=1$，$g(0)=0$ であることが示された。

(2)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}f(x)-\frac{g(h)-g(0)}{h}g(x)\right\}$$
$$=f'(0)f(x)-g'(0)g(x)$$
$$=-g(x) \quad (\because \text{条件 (D)})$$

であり，$f(x)$ はすべての x の値で微分可能であり，$f'(x)=-g(x)$ となることが示された。

(3)
$$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$$
$$=\{f(x)\cos x+g(x)\sin x\}+\{-f(x)\sin x+g(x)\cos x\}i$$

よって $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ の実部 $R(x)$，虚部 $I(x)$ を

$$R(x)=f(x)\cos x+g(x)\sin x\ ,\ I(x)=-f(x)\sin x+g(x)\cos x$$

と定める。

$$R'(x)=\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}+\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}$$

下線部 ② より，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ であるから

$$R'(x)=\{-g(x)\cos x-f(x)\sin x\}+\{f(x)\sin x+g(x)\cos x\}$$
$$=0$$

ゆえに，$R(x)=C_1$ (C_1 は定数) とおけ，$R(0)=f(0)\,(=1)$ より
$$C_1=1$$

また，$I'(x)=\{-f'(x)\sin x-f(x)\cos x\}+\{g'(x)\cos x-g(x)\sin x\}$ であり，下線部 ② より，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ であるから

$$I'(x)=\{g(x)\sin x-f(x)\cos x\}+\{f(x)\cos x-g(x)\sin x\}$$
$$=0$$

ゆえに，$I(x)=C_2$ (C_2 は定数) とおけ，$I(0)=g(0)\,(=0)$ より
$$C_2=0$$

これより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ は実部が 1，虚部が 0 であるため
$$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$$
が成り立つ。

(4) $p(x)q(y)+q(x)p(y)$

$$=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right)\cdot e^{-\frac{a}{b}y}g\left(\frac{y}{b}\right)+e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)\cdot e^{-\frac{a}{b}y}f\left(\frac{y}{b}\right)$$
$$=e^{-\frac{a}{b}x}\cdot e^{-\frac{a}{b}y}\left\{f\left(\frac{x}{b}\right)g\left(\frac{y}{b}\right)+g\left(\frac{x}{b}\right)f\left(\frac{y}{b}\right)\right\}$$
$$=e^{-\frac{a}{b}(x+y)}g\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b}\right)$$
$$=q(x+y)$$

より，$q(x)$ は条件 (B) を満たす。

また，

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{a}{b}h}f\left(\frac{h}{b}\right)-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{a}{b}h}f\left(\frac{h}{b}\right)-e^{-\frac{a}{b}h}+e^{-\frac{a}{b}h}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{e^{-\frac{a}{b}h}\cdot\frac{f\left(\frac{h}{b}\right)-f(0)}{h}+\frac{e^{-\frac{a}{b}h}-1}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{e^{-\frac{a}{b}h}\frac{f\left(\frac{h}{b}\right)-f(0)}{\frac{h}{b}}\cdot\frac{1}{b}+\frac{e^{-\frac{a}{b}h}-1}{-\frac{a}{b}h}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)\right\}$$
$$=1\cdot f'(0)\cdot\frac{1}{b}+1\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)$$
$$=0$$

ゆえに，$p(x)$ は $x=0$ で微分可能であり，$p'(0)=0$

一方

$$\lim_{h\to 0}\frac{q(h)-q(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{a}{b}h}g\left(\frac{h}{b}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{e^{-\frac{a}{b}h}\cdot\frac{g\left(\frac{h}{b}\right)-g(0)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{e^{-\frac{a}{b}h}\frac{g\left(\frac{h}{b}\right)-g(0)}{\frac{h}{b}}\cdot\frac{1}{b}\right\}$$
$$=1\cdot g'(0)\cdot\frac{1}{b}$$
$$=1$$

ゆえに，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能であり，$q'(0)=1$

以上から，$p(x)$，$q(x)$ は条件 (B)，(D) を満たす。

したがって，$p(x)$，$q(x)$ は

$$p(x)=\cos x\ ,\ \ q(x)=\sin x$$

といえるため，

$$\begin{cases} e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right)=\cos x & \cdots(\mathrm{V}) \\ e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)=\sin x & \cdots(\mathrm{VI}) \end{cases}$$

(Ⅴ) において，$\dfrac{x}{b}=X$ とおくと，$e^{-aX}f(X)=\cos bX$

ゆえに，$f(X)=e^{aX}\cos bX$

(Ⅵ) において，$\dfrac{x}{b}=X$ とおくと，$e^{-aX}g(X)=\sin bX$

ゆえに，$g(X)=e^{aX}\sin bX$

以上から，$f(x)=e^{ax}\cos bx$，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ …【答】

【総括】

考え方を示唆するようなリード文になっているため，やるべきことは見えやすいのですが，使っていい条件と，示すべき事柄 (使っていけない事柄) を整理しないと，示すべき事柄を根拠として話を進めてしまい，論理的に致命傷を負ってしまいかねません。

基本事項を本当の意味で理解している受験生にとっては標準的な内容に感じると思いますが，「まぁよく分からんけど，とりあえずそうやればうまくいくんだな」という態度が積もり積もって試験当日を迎えてしまった受験生は必要以上に難しく感じることになるでしょう。