

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル \vec{q} に対して、次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

- (1) 条件 I がすべての \vec{q} に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$ であるとする。

- (2) 座標平面上のベクトル \vec{v}, \vec{w} で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

- (3) さらに a, b, c, d が整数であるとし、 x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル \vec{q} に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

< '23 九州大 >

【戦略】

- (1) ベクトル表記で表された各種条件を、成分にして数式として言い換えていきます。

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすると, } r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q} \text{ とは, } \begin{cases} x = ar + bs \\ y = cr + ds \end{cases} \text{ です。}$$

つまり、条件 I とは、

任意の実数 x, y に対して、 $\begin{cases} x = ar + bs \\ y = cr + ds \end{cases}$ を満たす実数 r, s が存在する。(この連立方程式が解をもつ)

ということです。

r, s の連立方程式と見て、 r を消すと、

$$(ad - bc)s = ay - cx$$

となります。

$D \neq 0$ であれば、 $s = \frac{ay - cx}{ad - bc}$ と実数として s が存在するわけですが

$D = 0$ だとヤバイことになります。

記述でまとめるには、背理法がよいでしょう。

- (2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ として、今回考える内積を計算すると

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = a\alpha + c\gamma, \vec{n} \cdot \vec{w} = b\beta + d\delta, \vec{m} \cdot \vec{w} = a\beta + c\delta, \vec{n} \cdot \vec{v} = b\alpha + d\gamma$$

ということになりますから、

$$\begin{cases} a\alpha + c\gamma = 1 \\ b\alpha + d\gamma = 0 \end{cases}, \begin{cases} a\beta + c\delta = 0 \\ b\beta + d\delta = 1 \end{cases}$$

という α, γ に関する連立方程式、 β, δ に関する連立方程式を解けばよいでしょう。

- (3) 条件 II とは

任意の整数 x, y に対して、 $\begin{cases} x = ar + bs \\ y = cr + ds \end{cases}$ を満たす整数 r, s が存在する。(この連立方程式が整数解をもつ)

ということです。

実際にこれを r, s について解くと

$$(r, s) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc} \right)$$

ということになります。

つまり、任意の整数 x, y に対して r, s が整数となるための条件を考えていくことになります。

これについては全称命題と捉え、

$(x, y) = (1, 0), (0, 1)$ でも r, s が整数とならなければならないという必要条件から攻めればよいでしょう。

これにより、 $\frac{d}{ad - bc}, \frac{-c}{ad - bc}, \frac{-b}{ad - bc}, \frac{a}{ad - bc}$ が全て整数となっている必要が出てきます。

$a' = \frac{a}{D}, b' = \frac{-b}{D}, c' = \frac{-c}{D}, d' = \frac{d}{D}$ とおくと a', b', c', d' が全て整数なので、 $a'd' - b'c'$ も整数となります。

$$a'd' - b'c' = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{D}{D^2} = \frac{1}{D}$$

で、これが整数となる必要がありますから、 $D = \pm 1$ しか可能性はありません。

逆に $D = \pm 1$ のとき、

$$(r, s) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc} \right) = (\pm(dx - by), \pm(-cx + ay)) \text{ (複号同順)}$$

となり、任意の整数 x, y に対して、 r, s も整数として存在するため、 D のとり得る値としては $D = \pm 1$ となります。

【解答】

- (1) $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。全ての \vec{q} に対して $\vec{q} = r\vec{m} + s\vec{n}$ を満たす実数 r, s が存在する、すなわち任意の実数 x, y に対して

$$\begin{cases} x = ar + bs \cdots ① \\ y = cr + ds \cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 r, s が存在するときを考える。

$D = 0$ と仮定する。

このとき、①× c 、②× a より、 $\begin{cases} cx = acr + bcs \cdots ①' \\ ay = acr + ads \cdots ②' \end{cases}$

②'-①' より $(ad - bc)s = ay - cx$ であり、 $0 \cdot s = ay - cx \cdots ③$

これより、与えられた a, c に対して、 $cx - ay = 0$ を満たさない (x, y) に対しては③を満たす s が存在しないため、条件 I が全ての \vec{q} に対して成り立つということに反する。

ゆえに、 $D \neq 0$ である。

- (2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ とする。

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = a\alpha + c\gamma, \vec{n} \cdot \vec{w} = b\beta + d\delta, \vec{m} \cdot \vec{w} = a\beta + c\delta, \vec{n} \cdot \vec{v} = b\alpha + d\gamma$$

条件より、 $\begin{cases} a\alpha + c\gamma = 1 \cdots (\text{ア}) \\ b\alpha + d\gamma = 0 \cdots (\text{イ}) \end{cases} \quad \begin{cases} a\beta + c\delta = 0 \cdots (\text{ウ}) \\ b\beta + d\delta = 1 \cdots (\text{エ}) \end{cases}$

(ア)× d - (イ)× c より $(ad - bc)\alpha = d$

(イ)× a - (ア)× b より $(ad - bc)\gamma = -b$

$D (= ad - bc) \neq 0$ なので、 $\alpha = \frac{d}{ad - bc}$, $\gamma = -\frac{b}{ad - bc}$

これより、 $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} \\ -\frac{b}{ad - bc} \end{pmatrix} \cdots$ 【答】

同様に (ウ), (エ) より、 $\beta = -\frac{c}{ad - bc}$, $\delta = \frac{a}{ad - bc}$

これより、 $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{ad - bc} \\ \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \cdots$ 【答】

- (3) $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (x, y は整数) とすると、条件 II より

$$\vec{q} = r\vec{m} + s\vec{n}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = ar + bs \cdots ① \\ y = cr + ds \cdots ② \end{cases}$$

が成立するような整数 r, s が存在する。

①, ② を r, s についての連立方程式として解くと

$$(r, s) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc} \right)$$

a, b, c, d が整数のとき、任意の整数 x, y に対して

$$r = \frac{dx - by}{D}, s = \frac{-cx + ay}{D}$$

が整数となるための D の条件を考えればよい。

$(x, y) = (1, 0)$ のときの r, s は、 $(r, s) = \left(\frac{d}{D}, \frac{-c}{D} \right)$

このときの r, s も整数となる必要がある。

$(x, y) = (0, 1)$ のときの (r, s) は、 $(r, s) = \left(\frac{-b}{D}, \frac{a}{D} \right)$

このときの r, s も整数となる必要がある。

つまり、

$$a' = \frac{a}{D}, b' = \frac{-b}{D}, c' = \frac{-c}{D}, d' = \frac{d}{D}$$

が全て整数となる必要がある。

このとき $a'd' - b'c'$ も整数であり、 $\frac{ad - bc}{D^2} (= \frac{1}{D})$ が整数となる必要がある。

つまり、 $D = \pm 1$ となる必要がある。

逆に $D = \pm 1$ であるとき、任意の整数 x, y に対して

$$r = \frac{dx - by}{D}, s = \frac{-cx + ay}{D}$$

は整数となる。

以上から、 D のとりうる値は $D = \pm 1 \cdots$ 【答】

【総括】

D は 2014 年以前の課程にあった行列でいうところの

行列式 (Determinant)

と呼ばれるもので、現行課程で行列に触れていない受験生にとってはイメージが掴みにくい上、連立方程式を解く作業が苦痛に感じると思います。

別に無視してかまいませんが、(2)などは

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

に対して、 $\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1$, $\vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ という条件は

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{m} \cdot \vec{v} & \vec{m} \cdot \vec{w} \\ \vec{n} \cdot \vec{v} & \vec{n} \cdot \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ということを表し、

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

であるため、 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$

と \vec{v}, \vec{w} が求まります。

基本的には与えられた条件を成分に関する条件にかみ砕いていけばよいでしょう。

それができれば、(2) までは手が進んでほしい内容です。

(3) は $(r, s) = \left(\frac{dx-by}{ad-bc}, \frac{-cx+ay}{ad-bc} \right)$ が整数として存在するための条件として、 $ad-bc = \pm 1$ であれば十分であることはすぐに見抜けると思いますが、

$$ad-bc = \pm 1 \text{ じゃなきゃ困る (} ad-bc = \pm 1 \text{ である必要がある)}$$

という必要性をいかに論じるかが山場で、全称命題と捉えて屁理屈をいうことで話を進めていくことに慣れていないと難しいと思います。

【補足】

普段我々は $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という 2 本の単位ベクトルを基にした

「直交座標」を用いています。

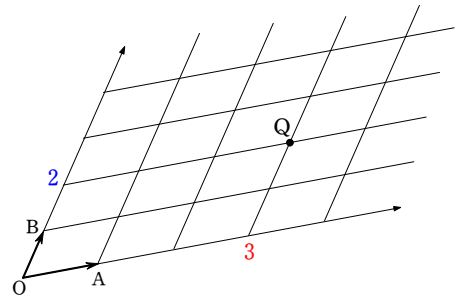
例えば、 $\vec{OQ} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ の場合、 $Q(3, 2)$ となります。

つまり、係数が座標とリンクします。

$\vec{OQ} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ であれば、 \vec{OA}, \vec{OB} という 2 本のベクトルを基にした斜交座標における $Q(a, b)$ に対応します。

※ 直交座標と区別するために $\langle a, b \rangle$ と表現することにします。

例えば、 $\vec{OQ} = 3\vec{OA} + 2\vec{OB}$ であれば $Q \langle 3, 2 \rangle$ に対応します。



本問における $r\vec{m} + s\vec{n}$ というのは、 \vec{m}, \vec{n} で張られる斜交座標における座標 $\langle r, s \rangle$ ということになります。

本問は普通の直交座標で表した (x, y) という座標が、斜交座標で言う所の $\langle r, s \rangle$ に対応しているときを考えるわけです。

(3) は任意の整数 x, y に対して、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ となるような整数 r, s が存在する条件を考えていました。

これは直交座標における任意の格子点が斜交座標においても格子点となるための条件を考えていたこととなります。