α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\alpha,\ a_{n+1}=|a_n-1|+a_n-1\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha>2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2}\leqq\alpha<2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

＜ ’23 九州大 ＞

【戦略】

(1) **得体のしれない漸化式ということで，ひとまず実験してみます。**

$$a_2=|\alpha-1|+\alpha-1=(1-\alpha)+\alpha-1=0$$
$$a_3=|0-1|+1-0=0$$

と，a_3 が a_2 と等しくなったため，これ以後漸化式の同一アルゴリズムにより，全て 0 となります。

したがって，$a_n=0$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ なので，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ です。

(2) **引き続き実験をしてみます。**

$$a_2=|\alpha-1|+\alpha-1=(\alpha-1)+\alpha-1=2\alpha-2$$
$$a_3=|2\alpha-3|+2\alpha-3=(2\alpha-3)+2\alpha-3=4\alpha-6$$
$$a_4=|4\alpha-7|+4\alpha-7=(4\alpha-7)+4\alpha-7=8\alpha-14$$
$$a_5=|8\alpha-15|+8\alpha-15=(8\alpha-15)+8\alpha-15=16\alpha-30$$

この辺りから，

「あれ？絶対値が全てそのまま外れないか？」

という疑問を持つでしょう。

そこで，$\alpha>2$ を用いて各項を評価してみると

$$a_2=|\alpha-1|+\alpha-1=(\alpha-1)+\alpha-1=2\alpha-2>2\cdot 2-2=2$$
$$a_3=|2\alpha-3|+2\alpha-3=(2\alpha-3)+2\alpha-3=4\alpha-6>4\cdot 2-6=2$$
$$a_4=|4\alpha-7|+4\alpha-7=(4\alpha-7)+4\alpha-7=8\alpha-14>8\cdot 2-14=2$$
$$a_5=|8\alpha-15|+8\alpha-15=(8\alpha-15)+8\alpha-15=16\alpha-30>16\cdot 2-30=2$$

と，どれも 2 より大きくなっています。

つまり，$a_n>2$ だろうという予想が立ち，

「そりゃ絶対値はそのまま外れるわ」

ということになるでしょう。

あとは，$a_{n+1}=2a_n+2$ なので，特性方程式を用いて一般項を出して極限を考えればオシマイです。

(3) **実験をしてみると，$a_2=|\alpha-1|+\alpha-1=2\alpha-2$ とそのまま外れますが $a_3=|2\alpha-3|+2\alpha-3=(3-2\alpha)+2\alpha-3=0$ と符号チェンジで絶対値が外れて 0 となります。**

一旦 0 になれば，(1) 同様これ以降全て 0 ということになります。

(4) **この漸化式は**

1 回でも符号チェンジで外れると，以後 0 となる

ということが言えます。

つまり，

少なくとも 1 回は絶対値が符号チェンジで外れる $\Longrightarrow$ 収束

ということが言えます。

このことから

「毎回絶対値がそのまま外れ続けることがあるか？」

ということに興味が行きます。

毎回絶対値がそのまま外れ続ける，すなわち $a_n\geqq 1$ であり続けると，(2) から

$$a_n=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}+2$$

となり，(4) の設定だと $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ ということになってしまいます。

これはおかしなことです。

つまり，毎回絶対値がそのまま外れ続けることはなく，少なくとも符号チェンジで外れることがあることが言えるため，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ と収束することになります。

© MathClinic

【解答】

(1) $a_2=|\alpha-1|+\alpha-1$
$=(1-\alpha)+\alpha-1$
$=0$

$a_3=|0-1|+0-1$
$=0$
$=a_2$

ゆえに，$a_n=0$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ となり収束する。…【答】

(2) ある自然数 k に対して $a_k>2$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=|a_k-1|+a_k-1\\&=(a_k-1)+a_k-1\\&=2a_k-2\\&>2\cdot2-2\\&=2\end{aligned}$$

$a_1=\alpha>2$ であることを考えると，帰納的に $a_n>2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

ゆえに，与えられた漸化式は，$a_{n+1}=(a_n-1)+a_n-1$

すなわち $a_{n+1}=2a_n-2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

これは $a_{n+1}-2=2(a_n-2)$ と変形でき，$a_n-2=(a_1-2)\cdot2^{n-1}$

これより，$a_n=(\alpha-2)\cdot2^{n-1}+2$ を得る。

条件より，$\alpha-2>0$ なので，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ となり発散する。…【答】

(3) $a_2=|\alpha-1|+\alpha-1$
$=2\alpha-2$

$a_3=|2\alpha-3|+2\alpha-3$
$=(3-2\alpha)+2\alpha-3$ $\left(\because\ \text{条件 } 1<\alpha<\dfrac{3}{2} \text{ より，} 2\alpha-3<0\right)$
$=0$

$a_4=|0-1|+0-1$
$=0$
$=a_3$

ゆえに，$a_n=0$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ となり収束する。…【答】

(4) すべての正の整数 n で $a_n>1$ であると仮定する。

このとき，与えられた漸化式は $a_{n+1}=(a_n-1)+a_n-1$

すなわち，$a_{n+1}=2a_n+2$ であり，(2) の途中経過と同様に

$$a_n=(\alpha-2)\cdot2^{n-1}+2$$

条件から $\alpha-2<0$ であるため，$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

一方，全ての自然数 n で $a_n>1$ と仮定していたため，$\lim_{n\to\infty}a_n>0$ となり，矛盾する。

したがって，$a_m\leqq1$ となる正の整数 m が存在する。
このとき，

$a_{m+1}=|a_m-1|+a_m-1$
$=(1-a_m)+a_m-1$
$=0$

$a_{m+2}=|0-1|+0-1$
$=0$
$=a_{m+1}$

ゆえに，$a_n=0$ $(n=m+1,\ m+2,\ \cdots)$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ となり収束する。…【答】

【総括】

得体のしれない漸化式に対しては実験して何かを見出す以外のことはできません。

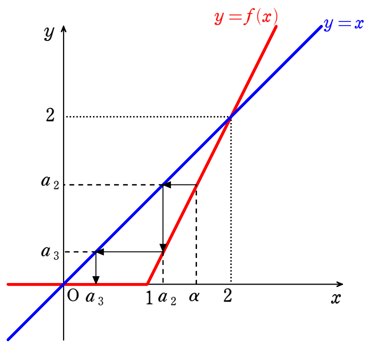
諦めずに手を動かせば，(3) まではおおよそ手が付くはずです。

(4) は手を動かしてみても，そのまま外れることもあれば，符号チェンジで外れることもあり，もどかしく感じるでしょう。

1 回でも符号チェンジが起これば，0 に収束する

という事実を強く意識できれば，そのまま外れ続けることってあるか？ということに興味が行くはずです。

なお，今回の数列 $\{a_n\}$ は，$f(x)=|x-1|+x-1$ としたとき，$a_{n+1}=f(a_n)$ で定まる数列であり，$y=f(x)$ のグラフに対して，$y=x$ のグラフを書き添えることで数列 $\{a_n\}$ の振る舞いが視覚化できるでしょう。



こうしてみると，(4) などもいつか $a_m\leqq1$ となる m が存在して，それ以後 $a_n=0$ となることも容易に読み取れます。

これ自体を解答としてよいかということについては採点基準によるとしか言いようがありませんが，時間との兼ね合いで減点覚悟という腹積もりでいた方が無難です。

© MathClinic