以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2) 複素数平面上の △ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とする。

$$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

＜ ’23 九州大 ＞

【戦略】

(1) **相反方程式と呼ばれる係数が左右対称な方程式であり，真ん中の x^2 で割ることで，$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$ を得ます。**

これは $x+\frac{1}{x}$ を塊として見ることで，$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$ と変形できます。

$t=x+\frac{1}{x}$ などと置きなおしてもよいですが，この程度であれば

$$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}^2=0$$

と見れますから，$x+\frac{1}{x}=1$，すなわち $x^2-x+1=0$ を得て $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と解決します。

(2) **$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ という形から**

点 β を点 α の周りに θ 回転させて r 倍拡大（縮小）させた点が点 γ であることが読み取れます。

そうなると，ひとまず「引かれるもの」を揃える必要がありますから与えられた等式を

$$(\beta-\alpha)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

と見たくなるでしょう。（幸い偶数乗なので，問題ありません。）

そこで，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の形を作るべく，両辺 $(\beta-\alpha)^4$ で割ると

$$1+\left\{1-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right\}^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

という形を得ます。

目に優しくするために，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=z$ とおくと，$1+(1-z)^4+z^4=0$ であり，これを整理すると

$$z^4-2z^3+3z^2-2z+1=0$$

という (1) の相反方程式が現れますから，$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となります。

これは $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ (複号同順) ということを意味するため，△ABC が正三角形だと分かり，解決です。

【解答】

(1) $x=0$ は $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ の解でないため，

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}^2=0$$

の解を求めればよい。

$x+\frac{1}{x}=1$ であり，$x^2-x+1=0$，すなわち求める解は

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$ …【答】

(2) A(α)，B(β)，C(γ) は三角形の頂点なので，α，β，γ は全て異なる複素数であり，$\alpha\fallingdotseq\beta$ かつ $\beta\fallingdotseq\gamma$ かつ $\gamma\fallingdotseq\alpha$

与えられた等式は

$$(\beta-\alpha)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

両辺 $(\beta-\alpha)^4$ ($\fallingdotseq 0$) で割ると

$$1+\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\right)^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

$$1+\left\{\frac{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}\right\}+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

$$1+\left\{1-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right\}^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=z$ とおくと，$1+(1-z)^4+z^4=0$

展開して整理すると，$2z^4-4z^3+6z^2-4z+2=0$

すなわち，$z^4-2z^3+3z^2-2z+1=0$

(1) より，$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ で，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$ (複号同順)

これより点 B(β) を点 A(α) の周りに $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転した点が C(γ) であるため，△ABC は正三角形である。…【答】

【総括】

(1) の相反方程式は知識寄りの側面はありますが，ノーヒントでできるよう準備しておいて然るべき話題で，九州大の受験生であれば「こんなのできるか」と文句は言えない話題と言ってよいでしょう。

(2) は

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

という形が

点 $\mathrm{B}(\beta)$ を点 $\mathrm{A}(\alpha)$ の周りに θ 回転し，r 倍拡大 (縮小) した点が $\mathrm{C}(\gamma)$

ということを表していることを常識にしておく必要があります。

(誤解を恐れずに言えば，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に回転拡大パーツを作用させたら $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ になった

というイメージで押さえましょう。)

これより，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ となるわけです。

つまり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を計算すれば

拡大倍率と回転角が浮き彫りになる

ということになります。

与えられた等式から，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の形を登場させようという気持ちを強くもてたかどうかで差がついたでしょう。