

## 高次式と余り【類題3】

整式  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$  について、次の問いに答えよ。

- $x^6$  を  $f(x)$  で割ったときの余りを求めよ。
- $x^{2021}$  を  $f(x)$  で割ったときの余りを求めよ。
- 自然数  $n$  が 3 の倍数であるとき、 $(x^2 - 1)^n - 1$  が  $f(x)$  で割り切れることを示せ。

< '21 早稲田大 >

### 【戦略1】

- 変なことを考えるより、実際に割り算してしまった方が早いでしょう。
- (1) の活用を考えると、 $x^{2021} = (x^6)^{336} \cdot x^5$  と見たいところです。

これにより、 $x^{2021} = \{(x^2 + 1)f(x) - 1\}^{336} \cdot x^5$  となるわけですが、二項定理を考えると、

$$\{(x^2 + 1)f(x) - 1\}^{336} = f(x) \cdot (\text{整式}) + 1$$

という形になります。

つまり、 $x^{2021} = f(x) \cdot (\text{整式}) + x^5$  ということになります。

$x^5$  は  $x^4 - x^2 + 1$  でまだ割れますから、 $x^5 = x(x^4 - x^2 + 1) + x^3 - x$

$$\begin{aligned} \text{として、} x^{2021} &= f(x) \cdot (\text{整式}) + xf(x) + x^3 - x \\ &= f(x) \cdot (\text{整式}) + x^3 - x \end{aligned}$$

となり、余りが  $x^3 - x$  と求まります。

- $n = 3k$  などとして、計算を進めていきます。

$f(x)$  で割った余りとは  $f(x)$  で括り切れない部分ですから

$$f(x) \text{ で括れる部分は括ってしまう}$$

という態度で計算を進めていきましょう。

- 同様二項定理が、 $f(x)$  で括り切れない部分を浮き彫りにしてくれませう。

### 【解1】

$$(1) \quad \begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x^4 - x^2 + 1 \overline{) x^6} \\ \underline{x^6 - x^4 + x^2} \phantom{0} \\ x^4 - x^2 \phantom{0} \\ \underline{x^4 - x^2 + 1} \\ -1 \end{array} \quad \text{よって、求める余りは } -1 \dots \text{ 罫}$$

$$(2) \quad x^{2021} = (x^6)^{336} \cdot x^5$$

(1) より、 $x^6 = (x^2 + 1)f(x) - 1 \dots \text{ ①}$  で、

$$x^{2021} = \{(x^2 + 1)f(x) - 1\}^{336} \cdot x^5$$

二項定理より、整式  $Q_1(x)$  を用いて

$$\{(x^2 + 1)f(x) - 1\}^{336} = f(x)Q_1(x) + 1$$

と表せる。

ゆえに、 $x^{2021} = f(x)Q_2(x) + x^5$  ( $Q_2(x) = x^5Q_1(x)$  とおいた)

ここで、

$$\begin{aligned} x^5 &= x(x^4 - x^2 + 1) + x^3 - x \\ &= xf(x) + x^3 - x \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} x^{2021} &= f(x)Q_2(x) + xf(x) + x^3 - x \\ &= f(x)Q_3(x) + x^3 - x \quad (Q_3(x) = Q_2(x) + x \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

これより、 $x^{2021}$  を  $f(x)$  で割った余りは  $x^3 - x \dots \text{ 罫}$

- 自然数  $n$  が 3 の倍数であるとき  $n = 3k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) とおける。

このとき、

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^n - 1 &= (x^2 - 1)^{3k} - 1 \\ &= \{(x^2 - 1)^3\}^k - 1 \\ &= (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)^k - 1 \\ &= \{x^6 - 3(x^4 - x^2 + 1) + 2\}^k - 1 \\ &= \{x^6 - 3f(x) + 2\}^k - 1 \\ &= \{f(x)(x^2 + 1) - 1 - 3f(x) + 2\}^k - 1 \quad (\because \text{①}) \\ &= \{f(x)(x^2 - 2) + 1\}^k - 1 \end{aligned}$$

二項定理より、整式  $Q(x)$  を用いて

$$\{f(x)(x^2 - 2) + 1\}^k = f(x)Q(x) + 1$$

と表せる。

ゆえに、

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^n - 1 &= f(x)Q(x) + 1 - 1 \\ &= f(x)Q(x) \end{aligned}$$

と表せ、 $(x^2 - 1)^n - 1$  は  $f(x)$  で割り切れる。

【戦略 2】

$x^6=(x^4-x^2+1)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$  という除法の原理による関係式から攻め落とす方針も当然頭をよぎって然るべきものです。

この場合、 $x^4-x^2+1=0$  という 4 次方程式の解を代入することになり、

$$\begin{aligned} x^4-x^2+1=0 &\Leftrightarrow (x^2+1)^2-3x^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)=0 \end{aligned}$$

という因数分解ができるかどうかが決め手になります。

この 4 次方程式の解は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \left( = \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\ \alpha_2 &= \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \left( = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) \\ \alpha_3 &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} \left( = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ \alpha_4 &= \frac{\sqrt{3}-i}{2} \left( = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) \end{aligned}$$

ということになり、高次計算をするにあたってはド・モアブルの定理を用いて捌いていきます。

(2) 基本的に (1) と同様です。

$$\begin{aligned} (3) \quad g(x) &= (x^2-1)^{3k}-1 \\ &= \{x^6-3x^4+3x^2-1\}^k-1 \\ &= \{x^6-3(x^4-x^2+1)+2\}^k-1 \\ &= \{x^6-3f(x)+2\}^k-1 \end{aligned}$$

となるわけですが、 $\begin{cases} \alpha_k^6 = -1 \\ f(\alpha_k) = 0 \end{cases} (k=1, 2, 3, 4)$  ですから、

$$g(\alpha_k) = 0$$

となり、 $g(x)$  は  $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ 、すなわち  $x^4-x^2+1$  で割り切れることになります。

【解 2】

$$\begin{aligned} (1) \quad x^4-x^2+1 &= (x^2+1)^2-3x^2 \\ &= (x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1) \end{aligned}$$

求める余りは高々 3 次であるため、 $ax^3+bx^2+cx+d$  とおける。

$x^6$  を  $f(x)$  で割った商を  $Q_1(x)$  とすると

$$x^6 = (x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)Q_1(x) + ax^3+bx^2+cx+d \dots \textcircled{1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} x^2+\sqrt{3}x+1=0 \text{ の解を } \alpha_1, \alpha_2 \quad (0 < \arg \alpha_1 < \arg \alpha_2 < 2\pi) \\ x^2-\sqrt{3}x+1=0 \text{ の解を } \alpha_3, \alpha_4 \quad (0 < \arg \alpha_3 < \arg \alpha_4 < 2\pi) \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \left( = \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\ \alpha_2 &= \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \left( = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) \\ \alpha_3 &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} \left( = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ \alpha_4 &= \frac{\sqrt{3}-i}{2} \left( = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) \end{aligned}$$

と表せる。

① に  $x=\alpha_1$  を代入すると

$$\alpha_1^6 = a\alpha_1^3 + b\alpha_1^2 + c\alpha_1 + d$$

ド・モアブルの定理に注意して整理すると

$$-1 = ai + b \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{2} + c \cdot \frac{-\sqrt{3}+i}{2} + d$$

$$\text{すなわち } -1 = \left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2}\right)i \dots (\text{ア})$$

同様に ① に  $x=\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  を代入して整理すると

$$-1 = \left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(-a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2}\right)i \dots (\text{イ})$$

$$-1 = \left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2}\right)i \dots (\text{ウ})$$

$$-1 = \left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(-a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2}\right)i \dots (\text{エ})$$

(ア), (イ), (ウ), (エ) より

$$\begin{cases} \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d = -1 \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d = -1 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

これら 4 式より、 $a=0, b=0, c=0, d=-1$

ゆえに、求める余りは  $-1 \dots$  圏

(2)  $x^{2021}$  を  $f(x)$  で割った商を  $Q_2(x)$  とする。

余りは高々3次であり  $ax^3+bx^2+cx+d$  とする。  
 (文字の節約のため  $a, b, c, d$  という(1)と同じ文字を使ったが、  
 ここでは(1)の  $a, b, c, d$  とは別物として扱う。)

このとき

$$x^{2021} = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)Q_2(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $\alpha_k^6 = -1$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) に注意すると

$$\alpha_k^{2021} = (\alpha_k^6)^{336} \cdot \alpha_k^5 = \alpha_k^5$$

②に  $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  を代入し、ド・モアブルの定理を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i &= \left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2}\right)i \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i &= \left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(-a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2}\right)i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i &= \left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2}\right)i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i &= \left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d\right) + \left(-a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2}\right)i \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{cases} \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

これら4式から  $a=1, b=0, c=-1, d=0$

よって、求める余りは  $x^3 - x \cdots \textcircled{\square}$

(3)  $g(x) = (x^2 - 1)^n - 1$  とおく。

$n$  が3の倍数であるとき、 $n = 3k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) とおける。

このとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2 - 1)^{3k} - 1 \\ &= \{(x^2 - 1)^3\}^k - 1 \\ &= (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)^k - 1 \\ &= \{x^6 - 3(x^4 - x^2 + 1) + 2\}^k - 1 \\ &= \{x^6 - 3f(x) + 2\}^k - 1 \end{aligned}$$

$$k=1, 2, 3, 4 \text{ に対して, } \begin{cases} \alpha_k^6 = -1 \\ f(\alpha_k) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ゆえに, } g(\alpha_k) = \{-1 - 3 \cdot 0 + 2\}^k - 1 = 0$$

よって、 $g(x)$  は  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$ 、すなわち  $x^4 - x^2 + 1$  で割り切れる。

【総括】

(1) では

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

という因数分解から、

$$x^6 = f(x)(x^2 + 1) - 1$$

に辿り着くこともできますが、少々技巧的なモノの見方を要します。

試験場では【解1】が最も現実的な解答となりますが、除法の原理を用いる【戦略2】、【解2】の路線に引きずられ、

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$$

というこの路線の急所となる因数分解に辿り着かず、立ち往生する受験生も多いと思われます。

仮にこの因数分解に辿り着いても、今回の解  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  は1の12乗根ということで、複素数平面の扱いに習熟している必要があり、計算自体も決して楽というわけではありません。